Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Ayudantía 2

17 de Marzo 2023

Nicolás Kantor Nagel - nkantorn@uc.cl

Crédito a Ayudantías 2015-2

Repaso de Conceptos

Señales

Definición: Son transmisores de información que se pueden tratar matemáticamente como funciones de una variable independiente, la forma en que la función evoluciona en la medida que cambia la variable independiente contiene la información. Pueden ser modificadas por un sistema.

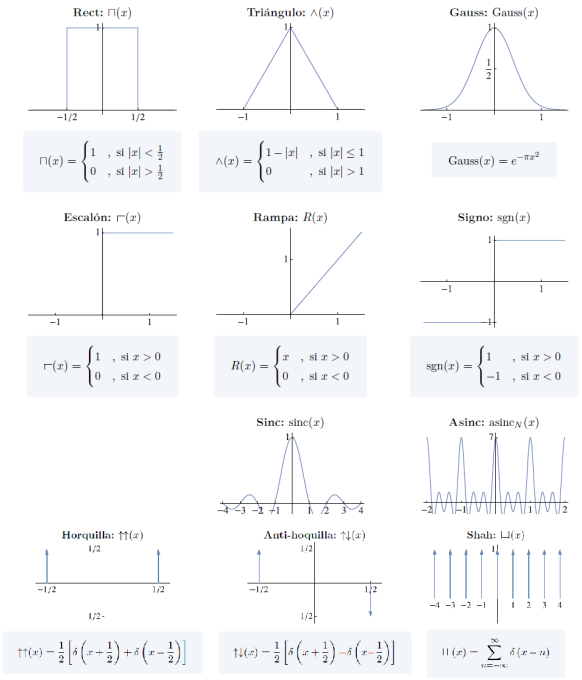
Clasificación según la naturaleza de la variable independiente:

- **Señales Continuas:** son aquellas que toman un valor para todos los valores de la variable independiente.
- **Señales Discretas:** son aquellas que solo toman valores para algunos puntos de la variable independiente.
- **Señales Digitales:** corresponden a las señales que toman valores acotados y solo para algunos valores de la variable independiente.

Observación: una señal continua puede ser presentada matemáticamente por una función discontinua.

Señales importantes:

Hay un grupo particular de funciones que nos interesarán para el modelamiento de señales.



Sistemas

Definición: Son mecanismos que transforman señales.

Tipos de sistemas:

- **Causales:** Son aquellos en que la salida solo depende del estado actual y de estados pasados.
- **Invariantes:** L(f(x+a)) = g(x+a)
- **Linealidad:** un sistema $L\{x(t)\}$ es lienal cuando cumple homogeneidad y superposición.
  1. $L\{x(t)\}$ es homogeneo si $\alpha L\{x(t)\} = L\{\alpha x(t)\}$
  2. $L\{x(t)\}$ cumple con superposición si $L\{x(t) + m(t)\} = L\{x(t)\} + L\{m(t)\}$
- **LTI:** lineales e invariantes.
- **Con memoria:** requieren estados pasados.
- **Estables:** a entradas acotadas entregan salidas acotadas.
- **Invertibles:** si un sistema tiene un sistema inverso con el que al conectarse en serie la salida da la entrada, es invertible.

Distribuciones

Son mapeos aplicados a funciones de Schwartz $\psi(x)$ que son funciones infinitamente derivables y que decaen rápidamente a 0.
Una distribución temperada se define como una distribución inducida por funciones, descrita de la forma:

$$< F, \psi >= \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\psi(x)dx$$

Propiedades

- Derivada: $< T', \psi > =$ - $< T, \psi' >$
- Desplazamiento: $< \tau_a T, \psi > = < T(x-a), \psi >$
- Escalamiento: $< \delta_a T, \psi > = < T, \frac{1}{|a|}\psi >$
- Multiplicación: $< Tf, \psi > = < T, f\psi >$

El Impulso

- Es una distribución de la forma: $< \delta, \psi >= \psi(0)$
- Desplazada se ve como $< \delta_a, \psi >= \psi(a)$
- Cumple con la propiedad del muestreo: $f(x)\delta = f(0)\delta$

Convolución

Se define la convolución como una operación entre dos funciones que nos entrega como resultado una tercera función. Su expresión matemática es:

$$h(t) = \{g * f\}(t) = \int_{\infty}^{\infty} g(x)f(t-x)dx$$

Lo que gráficamente corresponde a el área de la función multiplicación entre una de las funciones estática y la otra desplazada para todos los posibles desplazamientos.

La convolución cumple con las siguientes propiedades:

- Conmutatividad: $h(t) = \{g * f\}(t) = \{f * g\}(t)$
- Asociatividad: $h(t) = \{r * \{g * f\}\}(t) = \{g * \{r * f\}\}(t)$
- Distributividad: $h(t) = \{g * (f + r)\}(t) = \{g * f\} + \{g * r\}(t)$

- Multiplicación por escalar: $h(t) = \{a \cdot g * f\}(t) = \{g * a \cdot f\}(t) = a \cdot \{g * f\}(t)$
- Derivación: $h(t) = \{g * f\}(t) \rightarrow h'(t) = h(t) = \{g' * f\}(t) = h(t) = \{g * f'\}(t)$
- Convoluciones con el impulso: cumple con la propiedad del cedazo, y además se harán evidentes algunos desplazamientos.
  - $h(t) = \delta(x) * f(x) = f(x)$
  - $h(t) = \delta(x - a) * f(x) = f(x - a)$
  - $h(t) = \delta(x) * f(x - a) = f(x - a)$
  - $h(t) = \delta(x - a) * f(x - b) = f(x - a - b)$

Ejercicios

1. Calcule el valor de la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \wedge(x-1) \text{lll}(100x) dx$$

En primer lugar la función $\wedge(x-1)$ está desfasada una unidad, por lo que está centrada en 1 y va de 0 a 2. De igual manera podemos expresar lll(100x) como

$$\frac{1}{100} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n/100)$$

En esta notación es claro notar que los impulsos están desfasado cada un 1/100. Por lo que entre 0 y 1 caben 100 impulsos. Ocupando esta expresión y los nuevos límites de integración del triángulo podemos expresar la integral como:

$$\frac{1}{100} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{0}^{2} (1 - |x-1|)\delta(x - n/100)$$

Dado que los delta de Dirac valen cero en todos los valores excepto en donde están centrados, esta función pasa a ser discreta, por lo que podemos reemplazar la integral por una sumatoria de la cantidad de deltas de Dirac que tenga, en este caso entre 0 y 2 caben 200. Además usando la propiedad del muestreo de los impulsos:

$$\frac{1}{100} \sum_{n=0}^{200} (1 - |n/100 - 1|)$$

No es complejo notar que esta serie es simétrica en torno al 100 por lo que se puede reescribir como:

$$\frac{1}{100}(2 \sum_{n=0}^{99} \frac{n}{100} + \frac{100}{100}) = 1$$

2. Demuestre que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_e^2(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_o^2(t)dt$$

Donde $x_e(t)$ y $x_o(t)$ son la parte par e impar respectivamente de $x(t)$.

Partimos expresando $x(t) = x_e(x) + x_o(x)$. Al cuadrar la expresión se llega a

$$x(t)^2 = x_e(x)^2 + x_o(x)^2 + 2x_e(x)x_o(x)$$

Ahora podemos integrar tal que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x_e(x)^2 + \int_{-\infty}^{\infty} x_o(x)^2 + \int_{-\infty}^{\infty} 2x_e(x)x_o(x)$$

Es claro que

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2x_e(x)x_o(x)$$

Corresponde a una función impar integrada sobre un dominio simétrico, por lo que necesariamente se debe anular. De esta manera la expresión queda:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_e^2(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_o^2(t)dt$$

3. Demuestre que para $y(t) = e^t u(t) * \text{lll}(\frac{t}{2})$, se tiene que en el intervalo $0 \leq t < 2$, $y(t) = Ae^{-t}$, y encuentre el valor de A.

Primero recordamos que $\delta(x-a) * f(x) = f(x-a)$. Luefo podemos reescribir

$$\text{lll}(\frac{t}{2}) = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-2n)$$

Usando la primera propiedad se puede expresar:

$$y(t) = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(t-2n)}u(t-2n)$$

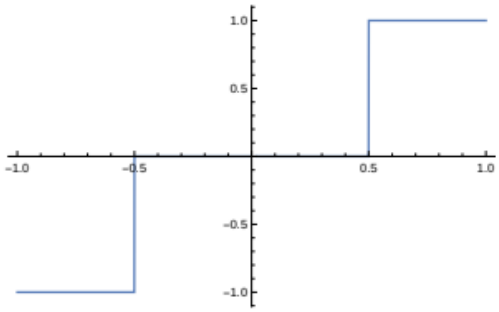
Sacando los términos que no dependen de n de la sumatoria y aplicando el escalón se llega a:

$$2e^{-t}\sum_{n=0}^{\infty} e^{2n}$$

Esto sencillamente se resuelve como una serie geométrica y se llega a

$$A = \frac{2}{1-e^2}$$

4. Se tiene la señal $f(x)$:



Exprese $f(x)$ como una suma de señales importantes.
Se puede resolver de dos maneras por tanteo:

$$f(x) = u(x - 1/2) - u(-(x + 1/2))$$

o de otra manera más fácil de ver:

$$f(x) = sgn(x)(1 - \sqcap(x))$$

5. Determine cuáles de los sistemas son causales:

La definición de causalidad puede expresarse como:

$$f(t < t_0) = 0 \implies y(t < t_0) = 0$$

$g(t) = f(t - 2)$
En este caso es claro que $g(t)$ solamente dependerá de valores pasado de $f(t)$, por ejemplo $g(0)$ dependerá de $f(-2)$ que ocurrió antes, por lo que **ES CAUSAL**

$g(t) = f(-t)$
En este caso es evidente un contraejemplo. Por ejemplo $t = -1$ vemos que el valor de $g(-1)$ dependerá de $f(1)$. En este caso nuestro valor en el pasado dependerá de una valor futuro, por lo que **NO ES CAUSAL**

$g(t) = \int_{-5}^{5} f(\tau)d\tau$
Se puede ver que por ejemplo en $t = 1$ tenemos que

$$y(1) = \int_{-5}^{5} f(\tau)d\tau$$

Por lo que mi valor en $t = 1$ penderá de valores mayores que 1, como por ejemplo 5. En general el sistema es **NO CAUSAL** en el intervalo $t \in]-\infty, 5)$ y podría

decirse que es causal para $t \geq 5$.

$g(t) = \frac{f^2(t)}{df(t)/dt}$
La definición de derivada debe cumplir:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{x \to t^-} f'(x) = \lim_{x \to t^+} f'(x)$$

En el caso teórico de una función perfectamente suave y continua, es decir con derivada en todos sus puntos se puede asumir que se cumple la expresión de arriba y que $t^- = t^+$ en cuyo caso la señal sería causal. Sin embargo al no poder garantizar esas condiciones para todo $f(x)$ puede ocurrir que :

$$\lim_{x \to t^-} f'(x) \neq \lim_{x \to t^+} f'(x)$$

para funciones no continuas ni suaves en cuyo caso el valor en el presente de mi función dependerá de un tiempo futuro infinitesimal t^+ por lo que será **NO CAUSAL** en general.