Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 Señales y Sistemas 1–2011 — Vicente Parot

Documento #5

Interrogación 1

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar libros y apuntes de clases.
- Sólo podrá solicitar re-corrección de aquellos problemas escritos con lápiz indeleble.
- Escriba un problema en cada hoja. Debe colocar su nombre en todas las hojas. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. [5 ptos] **Linealidad e Invariancia.** El regulador de un sistema de suministro eléctrico pretende disminuir el consumo de energía en horas punta mediante la aplicación de un recargo del 50 % en el precio a la corriente entregada al consumidor por encima de un nivel de corriente máximo sin recargo C_0. El total de la cuenta se va acumulando y comienza en cero en $t = 0$, la última vez que el cliente pagó toda su deuda. El precio nominal sin recargo es P pesos por cada unidad de corriente por unidad de tiempo. Considere un sistema determinado por la entrada $c(t)$, que es la corriente que consume el cliente para $t > 0$ y vale cero para $t < 0$, y la salida $q(t)$, que es la cuenta total que debe pagar el usuario cuando decida hacerlo. Considere que el suministro entregado al cliente es de voltaje continuo y fijo. Puede obviar las unidades y otros detalles no descritos en el problema.

   a) [1 ptos] Determine una forma analítica que exprese la salida q en función de la entrada c.

   b) [2 ptos] Demuestre si el sistema es lineal.

   c) [2 ptos] Demuestre si el sistema es invariante.

   Resultado:

   a) La multa se cobra cuando $c(t) > C_0$, es decir, cuando $\sqcap(c(t) - C_0)$ vale 1. Sumando la corriente ocupada y el recargo, el precio en cada instante está dado por

   $$(1 + \sqcap(c(t) - C_0)/2) \times c(t) \times P$$

   El valor de la cuenta total está dado por su integral definida

   $$q(t) = \mathcal{S}\{c(t)\} = P \int_{-\infty}^{t} (1 + \sqcap(c(x) - C_0)/2)\; c(x)\, dx$$

   b) El sistema no es lineal ya que no cumple la homogeneidad. Lo demuestra un contraejemplo: $4\mathcal{S}\{C_0/2\} = 2tPC_0 \neq 3tPC_0 = \mathcal{S}\{4C_0/2\}$.

c) Si a la salida del sistema para entrada $c(t)$ se le aplica un retardo, se obtiene

$$g(t) = q(t-T) = P\int_{-\infty}^{(t-T)} (1 + \sqcap(c(x) - C_0)/2)\; c(x)\, dx$$

Por otra parte, si el sistema tiene como entrada $c(t-T)$, se tiene

$$q(t) = \mathcal{S}\{c(t-T)\} = P\int_{-\infty}^{t} (1 + \sqcap(c(x-T) - C_0)/2)\; c(x-T)\, dx$$

Usando un cambio de variables $y = x - T$, $x = -\infty \Rightarrow y = -\infty$ y $x = t \Rightarrow y = t - T$. Se demuestra que el sistema es invariante en el tiempo.

$$q(t) = P\int_{-\infty}^{(t-T)} (1 + \sqcap(c(y) - C_0)/2)\; c(y)\, dy = g(t)$$

2. [6 ptos] **Serie de Series.** Resuelva los siguientes ejercicios usando series de Fourier.

a) [2 ptos] Para la función $f(x) = \text{sen}(\pi x + \phi)$, calcule los coeficientes de su expansión en serie de Fourier (en la forma que prefiera). ϕ es una constante real.

b) [2 ptos] Una función $f(x)$ con período π tiene coeficientes de Fourier $C_k = e^{-\pi k^2}$. ¿Cuáles son los coeficientes C_k de $g(x) = f'(x)$?.

c) [2 ptos] En una conversación acerca de funciones periódicas, Pedro cree que las que son pares tienen derivada impar, pero Juan argumenta que son las impares las que tienen derivada par. Diego, por otra parte, dice que ambas cosas son válidas en algunos casos pero no siempre. ¿Tiene razón cada uno de ellos? Demuestre su respuesta.

Resultado:

a) Usando la identidad trigonométrica, $f(x) = \text{sen}(\pi x + \phi) = \cos\phi\,\text{sen}\,\pi x + \text{sen}\,\phi\cos\pi x$ por lo que $a_0 = 0$, $a_1 = \text{sen}\,\phi$, $b_1 = \cos\phi$ y $a_k = b_k = 0$ para $k \geq 2$.

b) Usando la definición en su forma compleja (nótese que $\omega_0 = 2$):

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi k^2} e^{i2kx} \\ \frac{d}{dx} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi k^2} \frac{d}{dx} e^{i2kx} \\ f'(x) &= \sum_{-\infty}^{\infty} i2k e^{-\pi k^2} e^{i2kx} \end{aligned}$$

Los coeficientes de $g(x)$ son $C_k = i2ke^{-\pi k^2}$.

c) Usando la definición en forma trigonométrica, para cualquier función periódica y par $p(x)$ se tiene

$$p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_0 x$$
$$p'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} -k\omega_0 a_k \sin k\omega_0 x$$

Su derivada necesariamente es impar. Similar sucede para funciones periódicas impares $o(x)$

$$o(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega_0 x$$
$$o'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\omega_0 b_k \cos k\omega_0 x$$

Pedro y Juan tienen razón. Diego no.

3. [4 ptos] **Sistema.** Un sistema lineal e invariante tiene función de transferencia $H(u) = -i2\pi u\, e^{-i2\pi u}$. ¿Cuál debe ser su entrada para producir la salida $e^{-x}\sqcap(x)$?.

Resultado: La respuesta al impulso del sistema $h(x)$, dada por la transformada inversa de $H(u)$, se puede obtener usando las propiedades de desplazamiento y derivación.

$$\delta(x) \longrightarrow 1(u)$$
$$\delta(x-1) \longrightarrow e^{-i2\pi u}$$
$$h(x) = -\delta'(x-1) \longrightarrow -i2\pi u e^{-i2\pi u} = H(u)$$

Este es un sistema que deriva, desplaza y cambia el signo de la entrada. En vista de eso, la integral (definida) desplazada en sentido contrario e invertida de la salida es la única entrada $f(x)$ posible.

$$\begin{aligned} f(x) &= -\int_{-\infty}^{x} e^{-(y+1)}\sqcap(y+1)dy \\ &= -\int_{-1}^{x} e^{-(y+1)}dy\sqcap(x+1) \\ &= -\left(\frac{e^{-(y+1)}}{-1}\bigg|_{-1}^{x}\right)\sqcap(x+1) \\ &= (e^{-(x+1)}-1)\sqcap(x+1) \end{aligned}$$

4. [4 ptos] **Convolución de Gauss.** Considere la función gaussiana $g(x) = e^{-\pi x^2}$. Determine constantes reales y positivas A y B que cumplan:

$$g(Ax) * g(Ax) = Bg(x)$$

Resultado: Una posibilidad es analizarlo en el dominio de la frecuencia:

$$\begin{aligned} Bg(x) &\longrightarrow Bg(u) \\ g(Ax) &\longrightarrow \frac{1}{A} g(\frac{u}{A}) = \frac{1}{A} e^{-\pi \frac{u^2}{A^2}} \\ g(Ax) * g(Ax) &\longrightarrow \frac{1}{A^2} e^{-2\pi \frac{u^2}{A^2}} \end{aligned}$$

Para que ambos lados de la ecuacion en el enunciado sean iguales, también deben serlo sus transformadas de Fourier, en frecuencia el requerimiento es

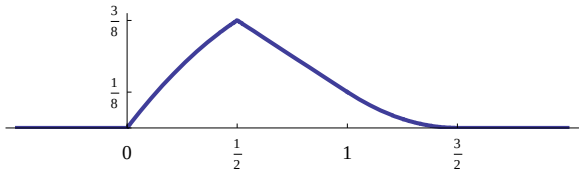
$$Be^{-\pi u^2} = \frac{1}{A^2} e^{-2\pi \frac{u^2}{A^2}}$$

Lo que se logra únicamente con $A = \sqrt{2}$ para tener el mismo ancho de gaussianas y por lo tanto $B = 1/2$ para tener la misma amplitud.

5. [4 ptos] **Convolución.** Calcule y grafique el resultado de la siguiente convolución. En el gráfico, indique todos los puntos, dimensiones y ecuaciones relevantes.

$$(\sqcap(x)\sqsubset(x)) \ * \ (\wedge(x)\sqsubset(x))$$

Resultado:



La función definida por tramos es

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x - \frac{x^2}{2} & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{5}{8} - \frac{x}{2} & \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + \frac{9}{8} & 1 < x \leq \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} < x \end{cases}$$

6. [5 ptos] **Fourier.** Considere la función $f(x) = f(x-1)$, con coeficientes de Fourier $C_k = e^{-|k|}$.

   a) [2 ptos] Calcule $F(u)$, la transformada de Fourier continua de $f(x)$.

   b) [2 ptos] Exprese $F(u)$ como un producto de la función $\sqcup\!\sqcup(u)$ por otra función $G(u)$.

   c) [1 ptos] Calcule la transformada de Fourier inversa continua de $F(u)$.

   Resultado:

   a) Usando la definición,

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-|k|} e^{ik\omega_0 x}$$

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-|k|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\omega_0 x} e^{-i2\pi ux} dx$$

$$F(u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-|k|} \delta(u-k)$$

   b) $F(u)$ está formado por una suma de impulsos, donde el impulso ubicado en $u = k$ tiene magnitud $e^{-|k|}$. Esto permite reemplazar k en el valor absoluto por u y luego sacar la magnitud de la sumatoria, quedando $F(u)$ como producto con $\sqcup\!\sqcup(u)$:

$$\begin{aligned} F(u) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-|k|} \delta(u-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-|u|} \delta(u-k) \\ &= e^{-|u|} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(u-k) \\ &= e^{-|u|} \sqcup\!\sqcup(u) \end{aligned}$$

   c) Para calcular la transformada inversa, se puede usar el par conocido y la propiedad de la convolución.

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(u)\} = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-|u|}\} * \mathcal{F}^{-1}\{\sqcup\!\sqcup(u)\} = \frac{2}{1+(2\pi x)^2} * \sqcup\!\sqcup(x) = f(x)$$