Prueba 1

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Escriba un problema en cada hoja. Debe colocar su nombre en todas las hojas. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. [6 ptos] Calcule el valor de

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

donde

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} \left\{ \sqcap\left(\frac{x}{3n-2}\right) * \sqcap(x) \right\}.$$

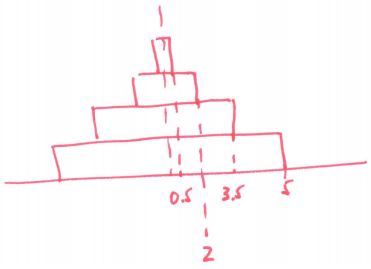
Resultado: Se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} \left\{ \sqcap\left(\frac{x}{3n-2}\right) * \sqcap(x) \right\} dx \\
&= \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sqcap\left(\frac{x}{3n-2}\right) * \sqcap(x) \right\} dx \\
&= \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \sqcap\left(\frac{x}{3n-2}\right) dx \int_{-\infty}^{\infty} \sqcap(x)\,dx
\end{aligned}$$

Pero

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqcap(x)\,dx = 1 \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sqcap\left(\frac{x}{3n-2}\right) dx = 3n-2$$

Es decir,el área pedida es el área de la sumatoria de esta última función



$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \sum_{n=1}^{N} (3n-2) \\
&= 3\frac{N(N+1)}{2} - 2N \\
&= (3N-1)N/2
\end{aligned}$$

2. [6 ptos] Demuestre analíticamente que

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|}$$

donde x_n son las raíces de $f(x)$.

Resultado: Para hacerlo aproximaremos $f(x)$ por su expansión de Taylor en torno a las raíces. Sea $f_n(x)$ la expansión en torno a x_n:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= (x - x_n)f'(x_n) + \frac{1}{2}(x - x_n)^2 f''(x_n) + \cdots \\ &\approx (x - x_n)f'(x_n) \end{aligned}$$

Para una raiz tenemos

$$\begin{aligned} \delta(f_n(x)) &= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \sqcap \left(\frac{f_n(x)}{\tau}\right) \\ &= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \sqcap \left(\frac{(x - x_n)f'(x_n) + \frac{1}{2}(x - x_n)^2 f''(x_n) + \cdots}{\tau}\right) \\ &= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \sqcap \left(\frac{(x - x_n)f'(x_n)}{\tau}\right) \\ &= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} \sqcap \left(\frac{x - x_n}{\tau/f'(x_n)}\right) \end{aligned}$$

El área del rect es $1/|f'(x_n)|$, por lo que

$$\delta(f_n(x)) = \frac{1}{|f'(x_n)|}\delta(x - x_n)$$

Y como $\delta(f(x)) = \sum \delta(f_n(x))$ se tiene

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|f'(x_n)|}$$

3. [12 ptos] Se tiene

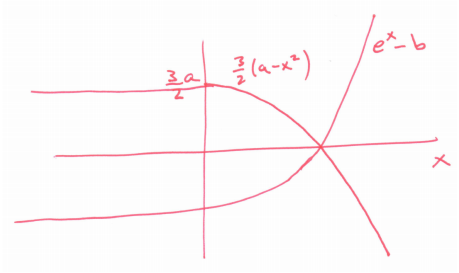
$$\delta(e^x - b) = \delta\left(\frac{3}{2}(a - x^2)\sqcap(x) + \frac{3a}{2}\sqcap(-x)\right).$$

¿Cuánto deben valer a y b para que esto sea cierto? Encuentre esos valores aproximadamente con una precisión de $\pm 0,5$.

Resultado: Sea

$$f(x) = e^x - b \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{3}{2}(a - x^2)\sqcap(x) + \frac{3a}{2}\sqcap(-x)$$

El gráfico de estas funciones es



de donde se aprecia que las raíces están a la derecha del origen, es decir, solo será relevante analizar

$$g(x) = \frac{3}{2}(a - x^2)$$

Para que los deltas sean iguales se tienen que cumplir dos condiciones:

(a) Estar ubicados en la misma posición, es decir, $f(x_o) = g(x_o) = 0$ para el mismo x_o.

(b) Tener la misma magnitud, es decir, $|f'(x_o)| = |g'(x_o)|$.

La raiz de $f(x)$ es $x_o = \ln b$, y la raiz de $g(x)$ es $x_o = \sqrt{a}$, de donde

$$\ln b = \sqrt{a}$$

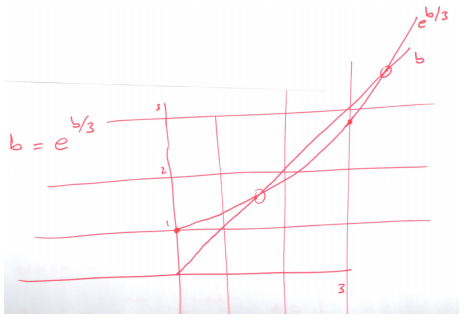
Por otro lado $|f'(x)| = e^x$ y $|g'(x)| = 3x$, de donde

$$e^{x_o} = 3x_o \quad \text{o} \quad b = 3\sqrt{a}$$

Sustituyendo una de estas ecuaciones en la otra, tenemos

$$b = e^{b/3}$$

Para resolver manualmente esta ecuación lo más fácil es graficar b y $e^{b/3}$ en función de b para ver dónde se cruzan



Por inspección podemos ver que

$$b \approx 1,5 \quad \text{o} \quad 4$$

y a debe ser $(b/3)^2$,

$$a \approx 0,25 \quad \text{o} \quad 1,7$$

4. [6 ptos] Se tienen dos sistemas lineales (I y II) conectados en cascada. La entrada del sistema I es $f_1(x)$ y su salida es $f_2(x)$. La entrada del sistema II es $f_2(x)$ y su salida es $f_3(x)$. El sistema I tiene la respuesta al impulso $h(x) = \wedge(x)$. Especifique un sistema II de manera que el sistema total (entrada $f_1(x)$ y salida $f_3(x)$) sea causal y lineal.

   Resultado: Dado que el sistema I es lineal, para mantener la linealidad total debemos hacer que el sistema II también sea lineal, lo que se asegura si lo especificamos como una respuesta al impulso. Dado que el sistema I no es causal, el sistema II debe compensarlo, es decir, debe retrasar la entrada en un monto igual a la anticipación que hace el sistema I. Lo más fácil es definir el sistema II como un simple retardo en uno.

$$h(x) = \delta(x - 1)$$