IEE2103 - SEÑALES Y SISTEMAS

Interrogación 1

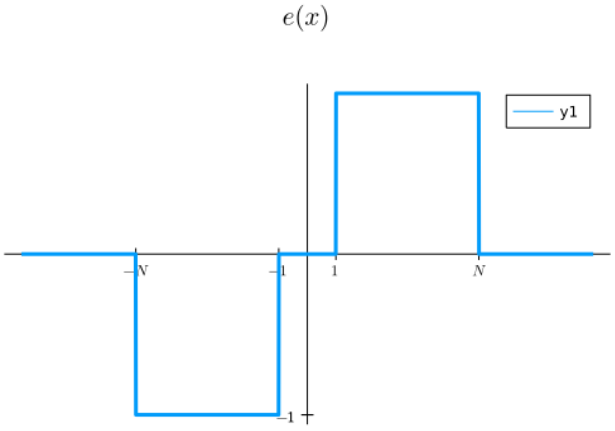
Prof. Rodrigo F. Cádiz

1er. semestre 2022
Tiempo: 2 hrs.
Puntos: 72
Fecha: 22/04/2022

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo dos carillas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre, número de interrogación y número de pregunta en todas las hojas que ocupe. Las hojas sin esta información no serán corregidas.

---

1. (12 pts.) **Escalera**. Considere la función escalera $e(x)$ especificada por el siguiente gráfico



   (a) (3 pts.) Exprese esta función escalera en términos de alguna de las funciones útiles vistas en clase.

   (b) (3 pts.) Grafique $g(x)$, la convolución de la función escalera consigo misma, es decir $g(x) = \{e * e\}(x)$, señalando todos los puntos relevantes.

   (c) (3 pts.) Grafique la Transformada de Fourier $E(u)$ de la función escalera, señalando todos los puntos relevantes.

   (d) (3 pts.) Suponga que $N \to \infty$. Calcule la Transformada de Fourier de la señal escalera en este caso.

Solución

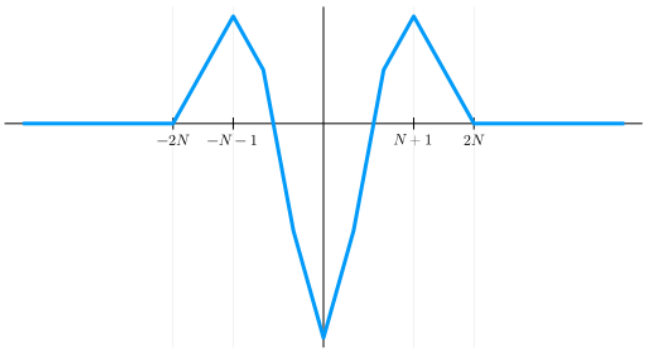
(a) La función escalera está compuesta de dos rects desplazados en una cantidad $\pm 1 + (N+1)/2$ → **1 pt.** y son de ancho $N-1$ → **1 pt.** , uno con amplitud positiva y el otro negativa, por lo que puede escribirse como

La pregunta 1 continúa en la página siguiente ...

$$e(x) = \sqcap\left(\frac{x-(N-1)/2}{N-1}\right) - \sqcap\left(\frac{x+(N-1)/2}{N-1}\right) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(b) La convolución se muestra en la siguiente imagen

$$\{e * e\}(x)$$

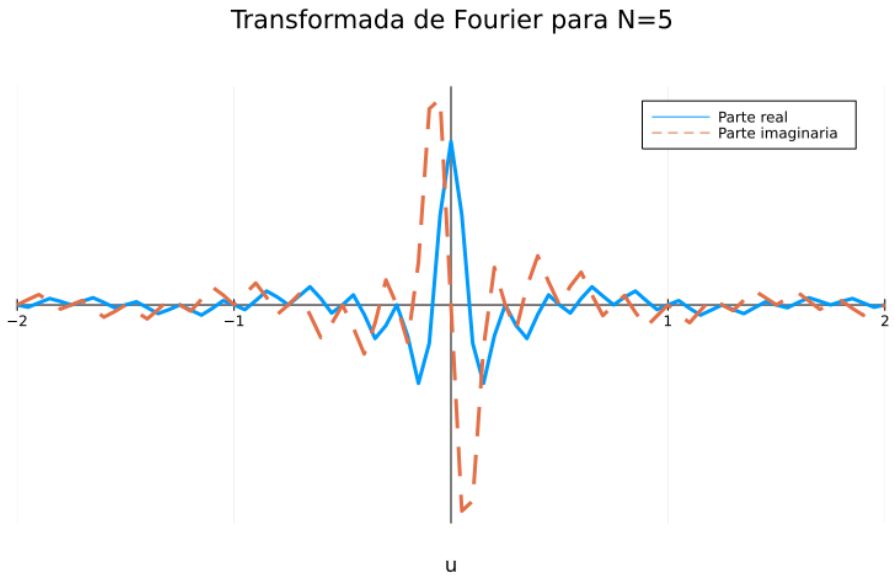


$\rightarrow$ **3 pts.**

(c) En el dominio de Fourier tenemos

$$F(u) = e^{-i2\pi(1+(N-1)/2)u}(N-1)\,\mathrm{sinc}\,((N-1)u) - e^{i2\pi(1+(N-1)/2)u}(N-1)\,\mathrm{sinc}\,((N-1)u) \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Gráficamente, para el caso $N = 5$, tenemos algo como esto



$\rightarrow$ **1 pt.**

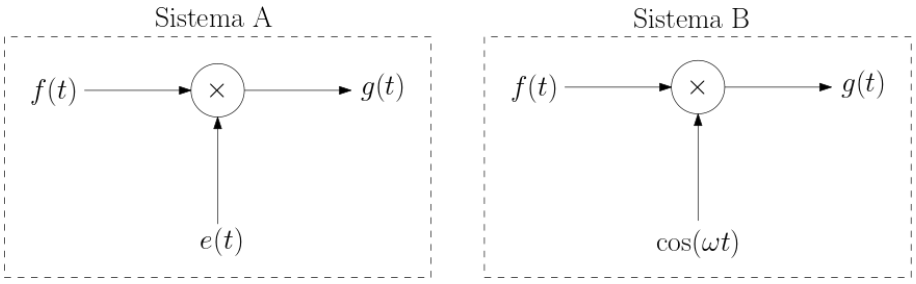
(d) En este caso $e(x) = \sqcap(x-1) - \sqcap(-x-1)$. Tomando Transformada de Fourier, tenemos entonces

$$E(u) = e^{-i2\pi u}\frac{1}{2}(\delta + \frac{1}{i\pi u}) - e^{i2\pi u}\frac{1}{2}(\delta + \frac{1}{i\pi(-u)}) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-i2\pi u}\delta + \frac{1}{2}e^{-i2\pi u}\frac{1}{i\pi u} - \frac{1}{2}e^{i2\pi u}\delta + \frac{1}{2}e^{i2\pi u}\frac{1}{i\pi u} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

$$= \frac{1}{2i\pi u}(e^{-i2\pi u} + e^{-i2\pi u}) = \frac{1}{i\pi u}\cos(2\pi u) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

2. (24 pts.) **Sistemas interconectados**. Considere los siguientes sistemas A y B especificados por la siguiente figura



donde $e(t)$ es la función escalera de la pregunta anterior, con N finito, $f(t)$ representa la entrada y $g(t)$ la salida de cada sistema.

(a) (4 pts.) Determine si el sistema A es lineal, invariante, estable y causal.

(b) (4 pts.) Determine si el sistema B es lineal, invariante, estable y causal.

(c) (4 pts.) Determine si el sistema C, resultante de conectar los sistemas A y B en paralelo, es lineal, invariante, estable y causal.

(d) (4 pts.) Determine si el sistema D, resultante de conectar los sistemas A y B en serie, es lineal, invariante, estable y causal.

(e) (8 pts.) Determine las respuestas de frecuencia de los sistemas A, B, C y D.

Solución

Primero notamos que ambos sistemas A y B son una proporcionalidad directa de la entrada, por lo tanto deben ser **lineales**.

Como están multiplicados por una función de t, entonces son variantes, en efecto, si se tiene una sistema con entrada f, salida g y función de proporcionalidad w, es decir $g(t) = f(t)w(t)$. Si

$$f(t) \to g(t) = f(t)w(t)$$

entonces

$$f(t-\tau) \to f(t-\tau)w(t) \neq f(t-\tau)w(t-\tau) = g(t-\tau)$$

por lo tanto un sistema de esta forma es **variante**.

Además, como $e(t)$ y $\cos(\omega t)$ son funciones acotadas, si la entrada es acotada, la salida también lo será, y ambos sistemas son **estables**.

Finalmente, dado que ambos sistemas no dependen de valores futuros de la entrada, son **causales**.

(a) Basado en lo anterior el sistema A es lineal → **1 pt.** , variante → **1 pt.** , estable → **1 pt.** , y causal → **1 pt.** .

(b) Basado en lo anterior el sistema B es lineal → **1 pt.** , variante → **1 pt.** , estable → **1 pt.** , y causal → **1 pt.** .

(c) Basado en lo anterior el sistema C es lineal → **1 pt.** , variante → **1 pt.** , estable → **1 pt.** , y causal → **1 pt.** .

La pregunta 2 continúa en la página siguiente ...

(d) Basado en lo anterior el sistema D es lineal → **1 pt.** , variante → **1 pt.** , estable → **1 pt.** , y causal → **1 pt.** .

(e) Dado que el sistema A es variante, no es posible en general representarlo mediante una convolución con una respuesta al impulso → **1 pt.** , y por lo tanto tampoco por una respuesta de frecuencia → **1 pt.**

Dado que el sistema B es variante, no es posible representarlo en general mediante una convolución con una respuesta al impulso → **1 pt.** , y por lo tanto tampoco por una respuesta de frecuencia → **1 pt.**

Dado que el sistema C es variante, no es posible representarlo en general mediante una convolución con una respuesta al impulso → **1 pt.** , y por lo tanto tampoco por una respuesta de frecuencia → **1 pt.**

Dado que el sistema D es variante, no es posible representarlo en general mediante una convolución con una respuesta al impulso → **1 pt.** , y por lo tanto tampoco por una respuesta de frecuencia → **1 pt.**

3. (14 pts.) **Series de Fourier**. Considere la señal

$$h(t) = \cos(4\pi|t|) + \frac{1}{2}\sin(6\pi t) + \frac{1}{3}\sin(2\pi t + \frac{\pi}{2})$$

(a) (2 pts.) Determine el período de la señal $h(t)$

(b) (4 pts.) Encuentre una expresión en Series de Fourier $S_h(t)$ para $h(t)$

(c) (4 pts.) Encuentre la Transformada de Fourier $H(u)$ de $h(t)$.

(d) (4 pts.) Bosqueje, en un mismo gráfico, $H(u)$ y los coeficientes de $S_h(t)$

Solución

Primero observamos que la función $h(t)$ puede escribirse como

$$h(t) = \cos(4\pi t) + \frac{1}{2}\sin(6\pi t) + \frac{1}{3}\cos(2\pi t)$$

(a) Observamos que el componente de menor frecuencia (la fundamental) es $\cos(2\pi t)$ → **1 pt.** , que tiene período 1 y que todos los otros componentes de la suma tienen frecuencias que son armónicos (múltiplos enteros) de la fundamental, por lo tanto el período de la señal es 1 → **1 pt.** .

(b) Esta pregunta es trivial, ya que $h(t)$ ya está escrita como una Serie de Fourier. En forma trigonométrica, los coeficientes son

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{3}, & n = 1 \\ 1, & n = 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \rightarrow \textbf{2 pts.}$$

La pregunta 3 continúa en la página siguiente ...

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 3 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Para la parte (d) necesitaremos los coeficientes complejos, para calcularlos podemos usar la relación $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$. Entonces

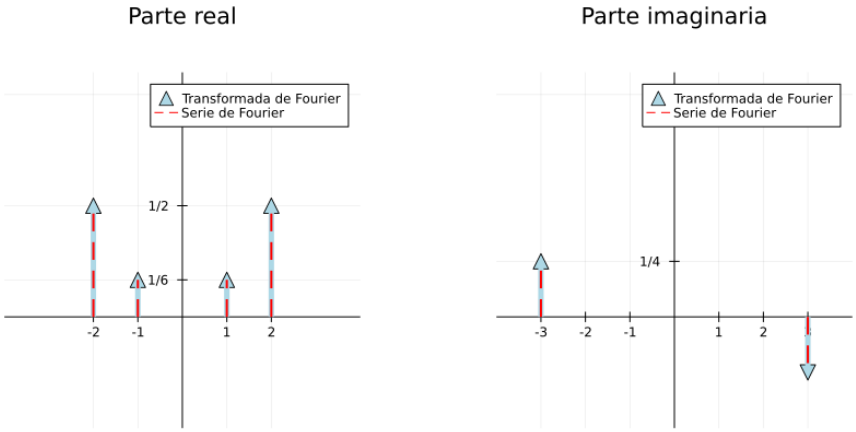
$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{6}, & n = \pm 1 \\ \frac{1}{2}, & n = \pm 2 \\ \frac{-i}{4}, & n = \pm 3 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(c) Dado que la Transformada de Fourier es lineal, y dado que la Transformada de Fourier de sinusoides son sumas de impulsos, entonces

$$H(u) = \frac{1}{6}(\delta_1 + \delta_{-1}) + \frac{1}{2}(\delta_2 + \delta_{-2}) + \frac{1}{4i}(\delta_3 - \delta_{-3}) \rightarrow \boxed{\textbf{4 pts.}}$$

Claramente esta expresión debe entenderse como una distribución.

(d) Para graficar en forma conjunta, utilizamos los coeficientes de la formulación compleja de la Serie de Fourier. Además, dado que tanto la Serie como la Transformada son complejas, graficamos partes real e imaginaria por separado. Observamos que los coeficientes de la Serie de Fourier (graficados en lineas discontinuas) corresponden a las amplitudes de los impulsos en la Transformada de Fourier.



$\rightarrow \boxed{\textbf{4 pts.}}$

4. (12 pts.) **Movimiento Browniano**. La versatilidad de la Transformada de Fourier la hace una herramienta muy útil para resolver ecuaciones que de otra forma serían muy difíciles. Veremos una aplicación de Fourier en física. Considere partículas flotando en un líquido. Sea $f(x,t)$ la función de densidad de probabilidad de encontrar una partícula en la posición x en el tiempo t. Einstein determinó la siguiente ecuación de difusión que gobierna este fenómeno para algunos casos

La pregunta 4 continúa en la página siguiente ...

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t)$$

donde D es una constante de difusión, dada por $D = \frac{kT}{6\pi\eta R}$. k es la constante de Boltzmann, T es la temperatura, η es la viscosidad del líquido y R es el tamaño de las particulas.

(a) (4 pts.) Asumiendo que $f(x,0) = \frac{\delta}{2}$, encuentre $f(x,t)$

(b) (2 pts.) Encuentre la media y la varianza, con respecto a x, de $f(x,t)$.

(c) (4 pts.) Describa como es la evolución en el tiempo (la difusión) de las partículas en función del tiempo y la temperatura.

(d) (2 pts.) Si se sabe que una partícula está con una probabilidad del 34.1% entre el origen y una posición X, encuentre un valor para X.

Solución

(a) Tomando Transformada de Fourier en x, tenemos que

$$\mathcal{F}_x\{\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\} = D(i2\pi u)^2 \mathcal{F}_x\{f(x,t)\} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Llamando $F(u,t)$ a $\mathcal{F}_x\{f(x,t)\}$ tenemos

$$F'(u,t) = -4\pi^2 D u^2 F(u,t)$$

donde F' denota $\frac{\partial}{\partial t} F$ y cuya solución sabemos que es

$$F(u,t) = F(u,0)e^{-4\pi^2 D u^2 t} = F(u,0)\text{Gauss}(2\sqrt{D\pi t}u) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Como $f(u,0) = \frac{\delta}{2} \rightarrow 1/2$, entonces

$$F(u,t) = \frac{1}{2}\text{Gauss}(2\sqrt{D\pi t}u) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Tomando transformada inversa de Fourier encontramos

$$f(x,t) = \frac{1}{2}\frac{1}{2\sqrt{D\pi t}}\text{Gauss}(\frac{x}{2\sqrt{D\pi t}}) = \frac{1}{4\sqrt{D\pi t}}\text{Gauss}(\frac{x}{2\sqrt{D\pi t}}) = \frac{1}{4\sqrt{D\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(b) Una distribución normal de media μ y varianza σ^2 es de la forma

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

por lo que es claro que en este caso la media es $\mu = 0$ $\rightarrow$ **1 pt.** y la varianza $\sigma^2 = 2Dt$ $\rightarrow$ **1 pt.**

La pregunta 4 continúa en la página siguiente ...

(c) como $D = \frac{kT}{6\pi\eta R}$, vemos que cuando T se incrementa, D se incrementa linealmente $\rightarrow$ **1 pt.** , lo que implica que la varianza se incrementará en el tiempo si la temperatura aumenta, es decir las partículas se difundirán más rápidamente $\rightarrow$ **1 pt.** .

De la misma manera, si R se incrementa, la varianza disminuirá a medida que el tiempo avanza $\rightarrow$ **1 pt.** , las partícular se difundirán más lentamente $\rightarrow$ **1 pt.**

(d) Sabemos que este percentil corresponde al tramo entre 0 y una desviación estándar $\sigma = \sqrt{2Dt}$ $\rightarrow$ **1 pt.** , es decir $X = \sqrt{2Dt}$ $\rightarrow$ **1 pt.**

5. (10 pts.) **Escoja solo una de las siguientes dos preguntas**

   (a) (10 pts.) **Transformada de Fourier de un shah**. Demuestre que la Transformada de Fourier de un shah de período 1 es otro shah de período 1.

   (b) (10 pts.) **Convolución y periodicidad**

   i. (2 pts.) Considere el operador desplazamiento, definido como $\tau_a f(x) = f(x-a)$. Demuestre que, para dos funciones f y g, se cumple que:

$$\tau_a f * g = f * \tau_a g = \tau_a\{f * g\}$$

   ii. (4 pts.) Utilice el resultado anterior para probar que si f es una señal periódica y g es una señal de tiempo o espacio limitado el resultado de la convolución entre f y g es periódico.

   iii. (4 pts.) Suponga ahora que tanto f como g son señales periódicas de períodos M y N respectivamente. Comente sobre la periodicidad de la convolución entre f y g.

Solución

(a) Primero escribimos la Transformada de Fourier de una distribución shah de período 1

$$\mathcal{F}\{\text{Ш}_1\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{\delta_n\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi nu} \rightarrow \boxed{\textbf{5 pts.}}$$

Pero, la fórmula de la suma de Poisson da que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi nu} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{e^{i2\pi nu}\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n = \text{Ш}_1 \rightarrow \boxed{\textbf{5 pts.}}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\mathcal{F}\{\text{Ш}_1\} = \text{Ш}_1}$$

(b) i. Tomando la Transformada de Fourier y considerando que la multiplicación es conmutativa, podemos escribir

$$(e^{i2\pi a}F)G = F(e^{i2\pi a}G) = e^{i2\pi a}(FG) \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

lo que establece la demostración

ii. Primero observamos que la convolución entre una señal periódica y una de ancho de banda acotado converge. $\rightarrow$ **1 pt.** Ahora, si tomamos una señal períodica de período T desplazada en una cantidad T queda la misma señal, es decir

$$\tau_T \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Entonces, de acuerdo a la parte anterior

$$\tau_T \tilde{f} * g = \tau_T\{\tilde{f} * g\} = \tilde{f} * g \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Observamos que la convolución no cambia si es que se desplaza en un período T, lo que implica que debe necesariamente ser periódica de período T $\rightarrow$ **1 pt.**

La pregunta 5 continúa en la página siguiente ...

iii. Utilizando el resultado anterior, la convolución debiera ser periódica, de período N debido a f → **1 pt.** , pero también de período M debido a g, → **1 pt.** lo que es una contradicción, porque una señal periódica no puede tener dos períodos → **1 pt.**

El problema aquí es que todo el razonamiento anterior es falso, porque la convolución entre dos señales periódicas no converge → **1 pt.**