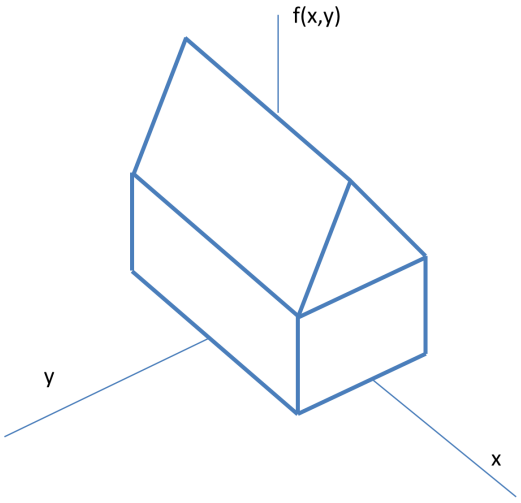
Prueba 6

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Escriba un problema en cada hoja. Debe colocar su nombre en todas las hojas. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. A partir del dibujo de una casita de su hermano menor (que no está a escala), donde la base es 2 (en x) $\times 1$ (en y), la altura del cielo es 1, y la pendiente del techo es 25%,



   (a) [3 ptos] Encuentre la función $f(x, y)$ que la grafica en base a fuciones conocidas.

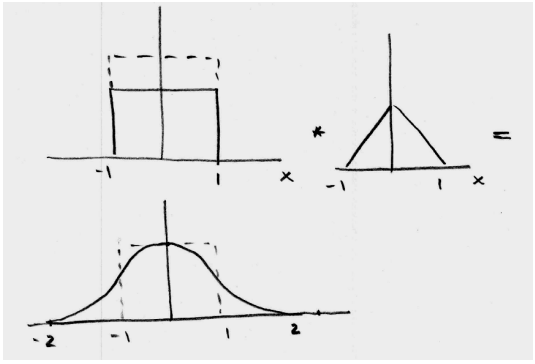
   (b) [3 ptos]Grafique el resultado de convolucionar $f(x, y)$ con $\wedge(x)\delta(y)$.

Resultado:

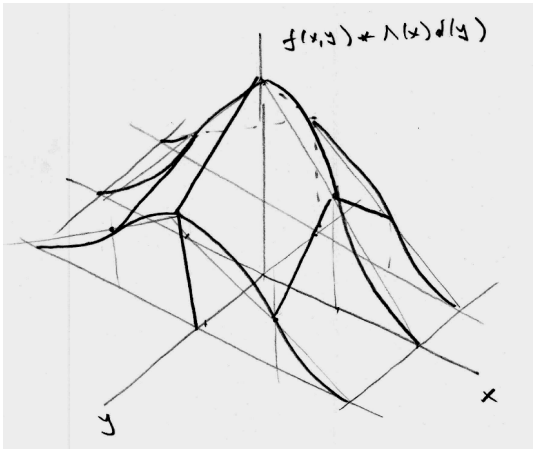
(a) La parte de abajo es simplemente $\sqcap(x/2, y)$. El techo en el sentido x es $\sqcap(x/2)$ y en el sentido y, $1/8 \wedge (2y)$. Es decir,

$$f(x, y) = \sqcap((x/2, y) + \frac{1}{8} \sqcap (x/2) \wedge (2y)$$

(b) Convolucionar con triángulo en el sentido x se puede hacer directamente en el gráfico. Nótese que un corte en el sentido x es simplemente un rect, por lo que la convolución cambiará los límites verticales por parábolas, tal como se indica en el dibujo. La altura del rect dependerá de la posición en y



El resultado, mirando los cortes en la dirección y son casitas (rect con un triángulo encima), aunque mirando los cortes en la dirección x sean líneas curvas.



2. [6 ptos] Se tiene la función $f(x)$ que es muestreada con un periodo T. Para recuperar la señal continua de las muestras se emplea interpolación sinc, es decir, $\hat{f}(x) = \text{Ш}(x/T)f(x) * \text{sinc}\,(x/T)$. Por error se escoge el periodo de muestreo igual al doble de lo que indica el teorema de Nyquist. ¿Qué condición, y por qué, debe cumplir $F(u)$, la transformada de Fourier de $f(x)$, para que la energía de $\hat{f}(x)$ sea mínima?

Resultado: Sea P el periodo de Nyquist, es decir $T = 2P$ y $u_{\max} = 1/2P$

$$f(x) \longrightarrow F(u)$$

$$\text{Ш}(x/T)f(x) \longrightarrow \text{Ш}(Tu) * F(u) = \text{Ш}(2Pu) * F(u) = \sum_k F(u - \frac{k}{2P})$$

En otras palabras, existirá aliasión correspondiente a la mitad del espectro, lo que también se puede escribir, para el periodo $0 < u < u_{\max}$ como

$$\hat{F}(u) = F(u) + F(u - u_{\max})$$

La energía será

$$E = \int_0^{u_{\max}} |\hat{F}(u)|^2\, du = \int_0^{u_{\max}} \hat{F}(u)\hat{F}^*(u)\, du$$

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{u_{\max}} (F(u)+F(u-u_{\max}))(F(u)+F(u-u_{\max}))^* \, du \\ &= \int_0^{u_{\max}} F(u)F^*(u) + F(u-u_{\max})F^*(u) + F(u)F^*(u-u_{\max}) + F(u-u_{\max})F^*(u-u_{\max}) \, du \\ &= \int_{-u_{\max}}^{u_{\max}} |F(u)|^2 \, du + \int_0^{u_{\max}} F(u-u_{\max})F^*(u) + F(u)F^*(u-u_{\max}) \, du \end{aligned}$$

La energía se minimizará cuando la segunda integral cancele a la primera, lo que sucede cuando $F(u-u_{\max}) = -F(u)$, ya que

$$\begin{aligned} E &= \int_{-u_{\max}}^{u_{\max}} |F(u)|^2 \, du - \int_0^{u_{\max}} F(u)F^*(u) + F(u)F^*(u) \, du \\ &= \int_{-u_{\max}}^{u_{\max}} |F(u)|^2 \, du - \int_{-u_{\max}}^{u_{\max}} |F(u)|^2 \, du \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. [6 ptos] Si $\operatorname{cas}\theta = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$ se define la transformada de Hartley (HT) de $f(x,y)$ como

$$H(u,v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\operatorname{cas}\{2\pi[ux+vy]\} \, dxdy$$

cuya inversa es

$$f(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} H(u,v)\operatorname{cas}\{2\pi[ux+vy]\} \, dudv$$

Encuentre la propiedad del desplazamiento para la HT, es decir, encuentre la HT de $f(x-\xi, y-\eta)$ en función de $H(u,v)$.

Resultado: El camino más corto para encontrarla es conectando la HT con la FT, pero también se puede hacer directamente si uno se acuerda de las propiedades trigonométricas del coseno y seno.

Dado que las bases son $\cos\theta + \operatorname{sen}\theta$ y no $\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$, directamente se puede ver que

$$H(u,v) = \Re F(u,v) - \Im F(u,v)$$

donde $F(u,v)$ es la FT. También nótese que si $f(x,y)$ es real, también lo es $H(u,v)$. En lo que sigue asumiremos $f(x,y)$ real sin pérdida de generalidad, porque si no lo fuera, bastaría con multiplicar por i. También usaremos que

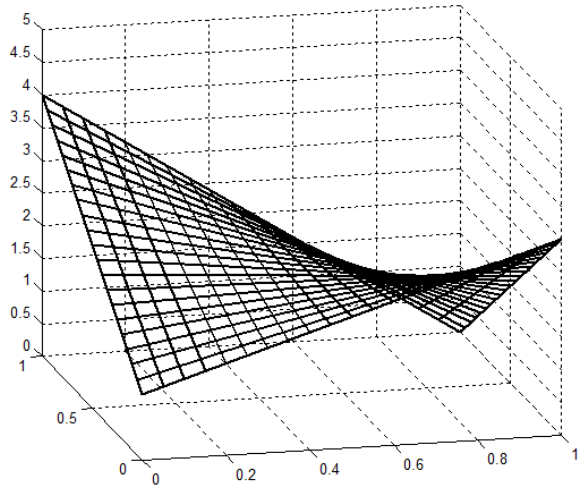
$$H(-u,-v) = \Re F(u,v) + \Im F(u,v)$$

La propiedad es, entonces,

$$\begin{aligned} f(x-\xi,y-\eta) &\xrightarrow{H} \Re\{e^{-i2\pi(u\xi+v\eta)}F(u,v)\} - \Im\{e^{-i2\pi(u\xi+v\eta)}F(u,v)\} \\ &\xrightarrow{H} \cos 2\pi(u\xi+v\eta)\Re F(u,v) + \operatorname{sen} 2\pi(u\xi+v\eta)\Im F(u,v) \\ &\quad -\{\cos 2\pi(u\xi+v\eta)\Im F(u,v) - \operatorname{sen} 2\pi(u\xi+v\eta)\Re F(u,v)\} \\ &\xrightarrow{H} \cos 2\pi(u\xi+v\eta)\{\Re F(u,v) - \Im F(u,v)\} + \\ &\quad \operatorname{sen} 2\pi(u\xi+v\eta)\{\Re F(u,v) + \Im F(u,v)\} \\ &\xrightarrow{H} \cos 2\pi(u\xi+v\eta)H(u,v) + \operatorname{sen} 2\pi(u\xi+v\eta)H(-u,-v) \end{aligned}$$

4. (a) [2 ptos] Encuentre la transformada de Fourier de $f(x,y) = g(x,y) + g(-x,-y) + G(x,y) + G(-x,-y)$ donde $g(x,y) \longrightarrow G(u,v)$.

   (b) [4 ptos] Se tiene un procedimiento de interpolación en dos dimesiones $\mathcal{P}$, tal que $f(x,y) = \mathcal{P}\{f[n,m]\}$. La figura muestra los valores de $f(x,y)$ que se obtendría entre los siguientes cuatro puntos: $f(0,1) = 4$, $f(0,0) = 1$, $f(1,0) = 3$ y $f(1,1) = 0$. Especifique el procedimiento $\mathcal{P}$.



Resultado:

(a) Aplicando las propiedades de dualidad y escalamiento se tiene

$$\begin{aligned} g(x,y) &\longrightarrow G(u,v) \\ g(-x,-y) &\longrightarrow G(-u,-v) \\ G(x,y) &\longrightarrow g(-u,-v) \\ G(-x,-y) &\longrightarrow g(u,v) \end{aligned}$$

Es decir

$$g(x,y)+g(-x,-y)+G(x,y)+G(-x,-y) \longrightarrow G(u,v)+G(-u,-v)+g(-u,-v)+g(u,v)$$

o, lo que es lo mismo,

$$f(x,y) \longrightarrow f(u,v)$$

(b) Claramente, del gráfico se aprecia que el manto es una superficie reglada y además que pasa por las muestras originales. Es decir, es claramente una interpolación lineal en las dos dimensiones (lo que se conoce como interpolación bi-lineal). Es equivalente a hacer una interpolación lineal entre pares de puntos en la dirección x y luego hacer una interpolación lineal en la dirección y para cada posición x. Matemáticamente es equivalente a convolucionar con un triángulo en ambas direcciones:

$$f(x,y) = \mathcal{P}\{f[n,m]\} = f_m(x,y) * \wedge(x) \wedge (y)$$

donde $f_m(x,y)$ es $f[n,m]$ expresada en forma continua como impulsos.