Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Tarea 4

Entrega: 22 de Noviembre a las 23:59 hrs.

Instrucciones generales

1. Para la parte de implementación, debe adjuntar un código desarrollado en Python (*.ipynb*).
2. Deben entregar un PDF con el desarrollo llamado *Apellido*_Tarea4.pdf (donde *Apellido* es su apellido).
3. La tarea es individual, pero pueden comentar las preguntas con sus compañeros.
4. Cada eje de los gráfico debe incluir un nombre descriptivo y su respectiva unidad.

Ejercicios Teóricos

1. Problemas cortos:

   a) **[1 punto]** Encuentre F(z), la transformada Z de f[n], en función de G(z), la transformada Z de g[n], sabiendo que se cumple la siguiente relación entre f[n] y g[n]:

   $$f[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} g[k]$$

   b) **[0.5 puntos]** Encuentre la señal causal f[n], cuya transformada Z es:

   $$F(z) = \frac{3 - 2z^{-1}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

   c) **[0.5 puntos]** Encuentre x[n] si:

   $$X(z) = ln(1 - z^{-1}) \qquad\qquad |z| > 1/2$$

   Hint: Puede serle útil usar la propiedad de la diferenciación de la transformada Z.

Solución:

a) Expandamos un poco una expresión para f[n] y f[n-1]:

$$f[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} g[k] = g[-\infty] + ... + g[n-2] + g[n-1] + g[n]$$

$$f[n-1] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} g[k] = g[-\infty] + ... + g[n-2] + g[n-1]$$

Si sacamos la diferencia entre ambos, vemos que sólo sobrevive el último término de la primera serie. Queda:

$$f[n] - f[n-1] = g[n]$$

Aplicando transformada Z a ambos lados y usando la propiedad del desplazamiento, obtenemos:

$$F(z) - z^{-1}F(z) = G(z)$$

Despejando obtenemos lo buscado

$$F(z) = G(z)\frac{z}{z-1}$$

b) Empleando fracciones parciales se obtiene:

$$F(z) = \frac{3-2z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})(1-z^{-1})} = \frac{A}{1-0.5z^{-1}} + \frac{B}{1-z^{-1}}$$

Se obtienen valores de 1 y 2 para A y B respectivamente. Luego, sabemos los siguinetes pares de trasnformada Z:

$$0.5^n u[n] \longrightarrow \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

$$2u[n] \longrightarrow \frac{2}{1-z^{-1}}$$

Finalmente,

$$f[n] = (2 + 0.5^n)u[n]$$

c) La propiedad de la diferenciación nos dice que:

$$nx[n] \longrightarrow -z\frac{d}{dz}X(z)$$

Derivando X(z) y multiplicando por -z:

$$-z\frac{d}{dz}X(z) = \frac{-z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

Conociendo la transformada Z de un escalón, podemos usar la propiedad del desplazamiento en el tiempo para obtener la transformada de -u[n-1]:

$$-u[n-1] \longrightarrow \frac{-z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

Lo que resulta en:

$$nf[n] = -u[n-1]$$

$$f[n] = \frac{-u[n-1]}{n}$$

2. Se tiene un sistema discreto de entrada x[n] y salida y[n], definida por la ecuación de diferencias siguiente:

$$y[n-2] + 2y[n-1] + y[n] = x[n]$$

Si la entrada es x[n] = 2^nu[n] (u[0] = 1) y se sabe que y[-1] = y[-2] = 0.

a) **[0.25 puntos]** Evalúe y[n] directamente en la ecuación de diferencias para n = 0,1,2,3. Haga una tabla con sus resultados

b) **[0.25 puntos]** Encuentre Y(z), la transformada Z de y[n]

c) **[0.25 puntos]** Encuentre y[n] a partir de Y(z). Use fracciones parciales.

d) **[0.25 puntos]** Evalúe la respuestas encontrada en c) para los cuatro primeros términos. Compruebe que son los mismos valores obtenidos en a). Comente las ventajas y desventajas del método para encontrar y[n] usado en a) v/s el usado en c).

Solución:

a) La tabla queda de la siguiente manera:

n	x[n]	y[n]
0	1	1
1	2	0
2	4	3
3	8	2

b) Aplicando la transformada Z a ambos lados:

$$z^{-2}Y(z) + 2z^{-1}Y(z) + Y(z) = X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}$$

Esto porque X(z) es la trasnfromada Z de la entrada exponencial que nos dieron. Despejando Y(z) queda:

$$Y(z) = \frac{1}{(1+z^{-1})^2(1-2z^{-1})}$$

c) Usando fracciones parciales se obtiene la siguiente expresión para Y(z):

$$Y(z) = \frac{1}{9}(\frac{4}{1-2z^{-1}} + \frac{2}{1+z^{-1}} + \frac{3}{(1+z^{-1})^2})$$

Calculando su inversa se obtiene:

$$y[n] = \frac{1}{9}(4(2)^n + 2(-1)^n - 3(n+1)(-1)^{n+1})u[n]$$

d) Los valores obtenidos para n = 0,1,2,3 son equivalentes para ambos métodos y se muestran en la tabla de a). Mientras el método de a) pareciese ser más rápido para los primeros términos (basta con evaluar en la ecuación de diferencias), se vuelve poco eficiente para buscar el valor de y[n] para valores grandes de n. Esto porque es un método recursivo, es decir, para conocer el valor de y[n] necesito el valor de y[n-1] y de y[n-2]. En cambio, a través de la transformada Z pudimos transformar la ecuación de diferencias en un problema de multiplicación y división. (En capítulos pasado vimos que la transformada de Laplace hace esto mismo para ecuaciones diferenciales continuas, la transfromada Z sirve para el caso discreto, ecuaciones de diferencias). De esta forma se obtuvo una expresión general para y[n] que es fácilmente evaluable para cualquier valor de n, sin ncesitar el valor de y[n] en el pasado.

3. Demostraciones:

a) **[1 punto]** Considerando una función **impar** periódica $x[n]$ de período N y su respectiva DFT $X[k]$, demuestre que:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k]$$

Solución: Demostramos cada lado de la igualdad:

a) $\sum_{n=0}^{N-1} x[n]$ Como $x[n]$ es una función impar, su promedio es 0. Por lo tanto:

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] = 0$$

b) $\sum_{k=0}^{N-1} X[k]$ Dado el desarrollo en a), solo queda demostrar que $\sum_{k=0}^{N-1} X[k] = 0$. Reemplazamos $X[k]$ con su definición:

$$\sum_{k=0}^{N-1} X[k] = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{-i2\pi kn}{N}} \right]$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} X[k] = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left(\cos(\frac{2\pi nk}{N}) - i \sin(\frac{2\pi nk}{N}) \right) \right]$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} X[k] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos(\frac{2\pi nk}{N})}_{\sum \text{f impar}=0} - i \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin(\frac{2\pi nk}{N}) \right]$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} X[k] = \frac{-i}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin(\frac{2\pi nk}{N})$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} X[k] = \frac{-i}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sum_{k=0}^{N-1} \sin(\frac{2\pi nk}{N})$$

Notamos que $\sin(\frac{2\pi nk}{N})$ es una función impar en k, por lo que su promedio es 0. Luego:

$$\sum_{k=0}^{N-1} X[k] = \frac{-i}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot 0$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} X[k] = 0$$

Como ambos lados de la ecuación resultan en 0, queda demostrada la igualdad.

b) **[1 punto]** Sea $x[n]$ una función discreta finita de largo N, y su respectiva transformada z $X[z]$. Se define $x_R[n]$ como la versión invertida en el tiempo de $x[n]$, con transformada z $X_R[z]$. Demuestre la siguiente relación:

$$X_R[z] = z^{1-N} X\left(\frac{1}{z}\right)$$

Solución: La versión invertida en el tiempo de $x[n]$ se puede expresar como:

$$x_R[n] = x[N-1-n]$$

Desarrollamos su transformada:

$$X_R[z] = \sum_{n=0}^{N-1} x_R[n] z^{-n}$$

$$X_R[z] = \sum_{n=0}^{N-1} x[N-1-n] z^{-n}$$

Usamos la variable auxiliar m, tal que:

$$m = N - 1 - n \qquad\qquad n = N - 1 - m$$
$$m = 0 \rightarrow n = N - 1 \qquad\qquad n = 0 \rightarrow m = N - 1$$

$$X_R[z] = \sum_{m=N-1}^{0} x[m] z^{-(N-1-m)}$$
$$X_R[z] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] z^{m-(N-1)}$$
$$X_R[z] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] z^{m} z^{-(N-1)}$$
$$X_R[z] = z^{-(N-1)} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} x[m] z^{m}$$

Notamos que:

$$X[z] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] z^{-n} \rightarrow X[z^{-1}] = X[\frac{1}{z}] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] z^{n}$$

Reemplazamos:

$$X_R[z] = z^{-(N-1)} \cdot X\left[\frac{1}{z}\right]$$
$$X_R[z] = z^{1-N} \cdot X\left[\frac{1}{z}\right]$$

4. **[2 puntos]** Considere la señal discreta $x[n]$ definida a continuación:

$$x[n] = \begin{cases} n(a^n + b^n) & 0 \leq n < M \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Donde a, b son constantes reales tales que $|a| < 1$ y $|b| < 1$, y M es un entero positivo. Encuentre la transformada z $X[z]$ de $x[n]$. No olvide analizar la región de convergencia.

Solución:

Ejercicios de Implementación

1. Problema de investigación:

   a) **[1 punto]** Investigue y explique la relación que existe entre la ecuación de diferencias de un filtro, su función de transferencia y su respuesta de frecuencia. Se espera que su respuesta incluya una descripción matemática de la relación.

   b) **[1 puntos]** Determine analíticamente la magnitud de la respuesta de frecuencia de un filtro con la siguiente ecuación de diferencias:

   $$y[n] = 0.5x[n] + 0.5x[n-1]$$

   c) **[1 punto]** Grafique la respuesta de frecuencia obtenida anteriormente para $f_s = 8000Hz$. ¿A qué tipo de filtro corresponde?

   Recordatorios:

   - Recuerden que el dominio de la respuesta de frecuencia está limitado por el criterio de Nyquist.
   - La magnitud de la respuesta de frecuencia se tiene que graficar en dB.

   Solución:

   a) [1]La ecuación de diferencia de un filtro se puede expresar como:

   $$y[n] = b_0x[n] + b_1x[n-1] + ... + b_Mx[n-M] - a_1y[n-1] - ... - a_Ny[n-N]$$

   Si usamos la transformada Z y despejamos $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$:

   $$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + ... + b_Mz^{-M}}{1 + a_1z^{-1} + ... + a_Nz^{-N}}$$

   Obtenemos la función de transferencia. Finalmente, la respuesta en frecuencia se obtiene evaluando $z = e^{i2\pi\nu}$.

   b) Usando la transformada Z obtenemos:

   $$Y(z) = 0.5X(z)(1 + z^{-1})$$

   Luego despejamos la función de transferencia:

   $$H(z) = 0.5(1 + z^{-1})$$

   Para obtener la respuesta en frecuencia reemplazamos $z = e^{i2\pi\nu}$:

[1]Li Tan: Digital Signal Processing

$$H(\nu) = 0.5(1 + e^{-i2\pi\nu})$$

$$H(\nu) = 0.5e^{-i\pi\nu}(e^{i\pi\nu} + e^{-i\pi\nu})$$

$$H(\nu) = e^{-i\pi\nu}cos(\pi\nu)$$

Por lo que la magnitud de la respuesta en frecuencia es:

$$|H(\nu)| = |cos(\pi\nu)|$$

c) El dominio de la respuesta en frecuencia es de $-F_s/2$ a $F_s/2$, pero debido a que se tiene una sistema con coeficientes reales, basta con graficar de $f = 0Hz$ a $F_s/2$:

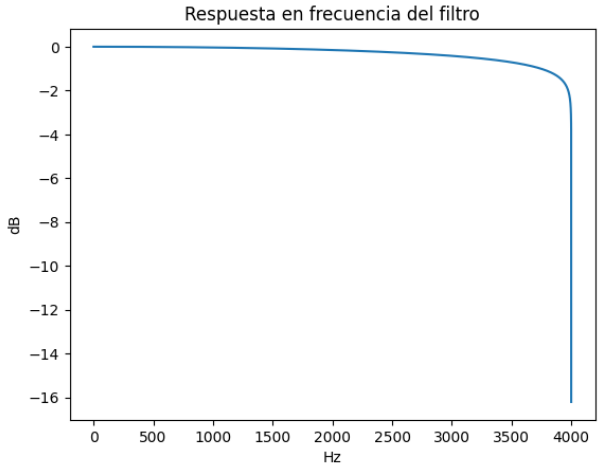


Figura 1: Respuesta en frecuencia

Donde claramente se observa un filtro pasabajos, que tiene sentido ya que la ecuación de diferencias corresponde a un promedio móvil.

2. Considere un filtro con la siguiente ecuación de diferencias:

$$y[k] = 0,235x[k] - 0,417x[k-2] + 0,235x[k-4] - 0,345y[k-2] - 0,34y[k-4]$$

a) **[1 punto]** Utilice la tranformada Z para obtener la función de transferencia del filtro.

b) **[1.5 puntos]** Investigue sobre la función *freqz()* de scipy. Utilice esta función para graficar la magnitud y fase de la respuesta de frecuencia del filtro.
Recordatorios:

- El dominio de su gráfico debe ir de $\nu = 0$ a $\nu = 0.5$ (frecuencia reducida).
- Recuerden graficar la magnitud en dB.

c) **[1 punto]** Analice la respuesta de frecuencia de filtro. ¿A qué tipo de filtro corresponde? ¿Cuál es la frecuencia de corte del filtro (dependiendo del tipo de filtro este puede tener más de una)? ¿Cuál es el ancho de la banda pasante del filtro?

d) **[1.5 puntos]** Utilice la función *dimpulse()* de scipy para graficar la respuesta al impulso del filtro.

Solución:

a) Usando la transformada Z llegamos a la siguiente función de transferencia:

$$H(z) = \frac{0.235 - 0.417z^{-2} + 0.245z^{-4}}{1 + 0.345z^{-2} + 0.34z^{-4}}$$

b) A continuación se presenta la respuesta en frecuencia del filtro:

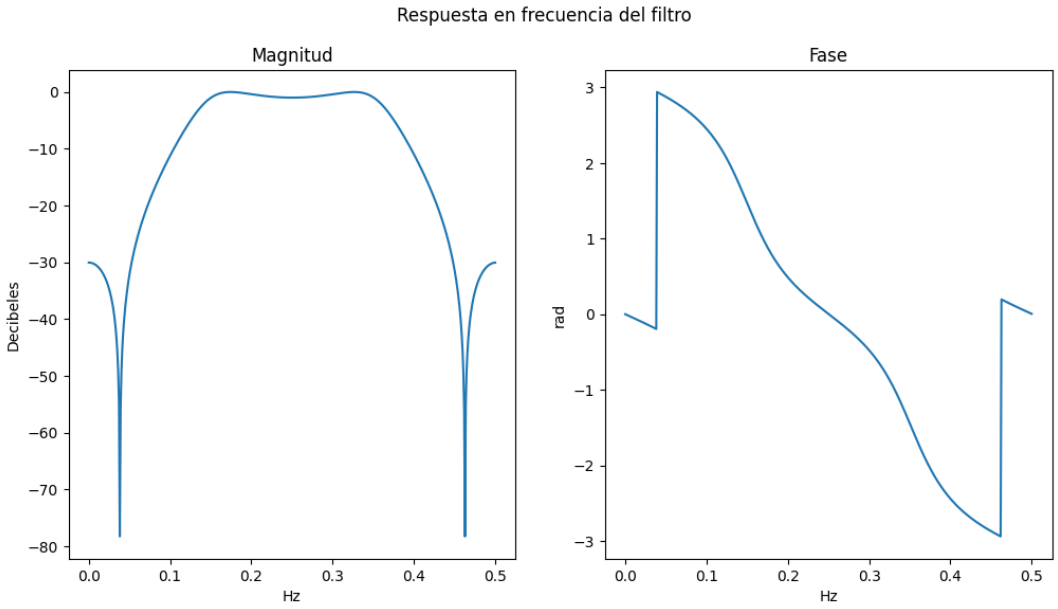


Figura 2: Respuesta en frecuencia

c) Observando la respuesta en frecuencia del filtro notamos que este correponde a un pasa-banda. Más aún, evaluando los puntos cercanos a $-3dB$ notamos que las frecuencia de corte son:

$$\nu_1 = 0.136 \quad \nu_2 = 0.364$$

Lo que se traduce en un ancho de banda de $\nu = \nu_2 - \nu_1 = 0.228$.

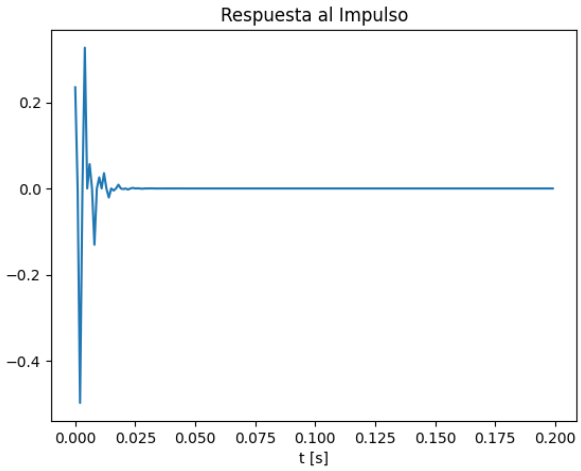


Figura 3: Respuesta al impulso

d) Para este problema se va a usar una frecuencia de muestreo de $1000Hz$ y un n de 200 puntos. Esto resulta en:

3. **[Bonus]** El ruido aditivo blanco gaussiano (AWGN, por sus siglas en inglés) es una señal estocástica que está presente en muchas aplicaciones de la ingeniería eléctrica. A continuación, obtendrá información sobre esta señal aplicando los conocimientos del curso:

   a) **[0.25 puntos]** Investigue sobre las principales características del AWGN. Mencione al menos dos ámbitos de la ingeniería donde es relevante considerar este tipo de ruido.

   b) **[0.5 puntos]** Para tener una realización de ruido AWGN, genere un *script* en Python que entregue una secuencia de N números aleatorios con distribución gaussiana con media 0 y varianza igual a 1. Grafique una realización del ruido para $N = 1000$.

   c) **[0.25 puntos]** Investigue y explique la relación entre autocorrelación y densidad espectral de potencia para señales estocásticas.

   d) **[0.5 puntos]** La autocorrelación de una señal discreta se define como:

$$R[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]x[m-n]$$

   Por otro lado, la densidad espectral de potencia ($S[k]$) se define como:

$$S[k] = DFT\{R[n]\}$$

   Exprese la autocorrelación como una convolución. Luego, exprese $S[k]$ como una función de la DFT de la señal $x[n]$.

e) **[0.5 puntos]** Para calcular $S[k]$ usando el resultado del ítem anterior, se necesita determinar la DFT de $x[n]$. Para lograr esto último, genere una función en *Python* que calcule la DFT de una señal discreta de largo N. (No pueden usar funciones de librerías que calculan directamente la DFT).

f) **[0.5 puntos]** Considerando $x[n]$ como una secuencia de AWGN con largo N y una tasa de muestreo igual a 0.1 segundos, grafique la densidad espectral de potencia de esta señal estocástica para los casos $N = 10,\ 100$ y 1000. Para lograr lo pedido, ocupe las funciones y resultados obtenidos en los ítems anteriores. ¿Por qué se llama ruido **blanco** gaussiano?

g) **[0.5 puntos]** Utilizando propiedades de la DFT, obtenga y grafique la autocorrelación del ruido AWGN para los distintos valores de N pedidos en f). ¿A qué señal conocida se parece $R[n]$ a medida que N aumenta?

Solución:

a) El ruido AWGN es una señal estocástica presente en los materiales conductores. Sus principales características consisten en que se trara de un proceso de media cero, varianza que depende de la temperatura del conductor y presenta una densidad espectral de potencia uniforme. El ruido AWGN es muy relevante en el área de comunicaciones (permite evaluar desempeño de una red) y en el área de control de procesos (por ejemplo, permite evaluar sensibilidad de un sistema de control frente a perturbaciones). También se consideran otros ámbitos.

b) Una posible solución se muestra a continuación:

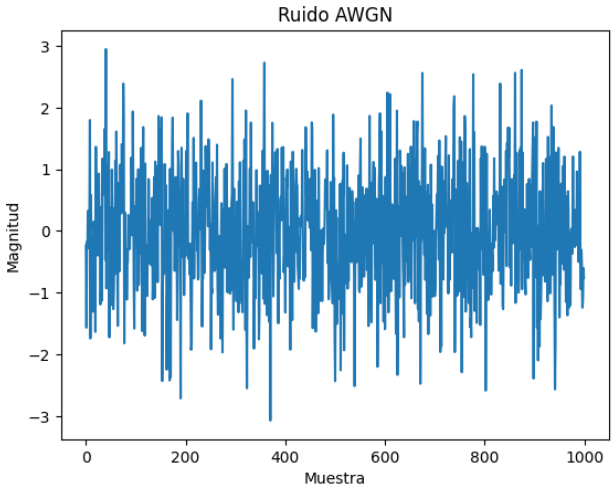


Figura 4: Ruido AWGN

c) La autocorrelación es una medida de la dependencia estadística de una señal estocástica entre dos instantes de tiempo. Por otro lado, la densidad espectral de

potencia muestra la distribución de la potencia de una señal en el dominio de la frecuencia y corresponde a la transformada de Fourier de la autocorrelación.

d) Por inspección,

$$R[n] = x[n] * x[-n]$$
$$X[k] = DFT\{x[n]\}$$
$$S[k] = DFT\{R[n]\} = X[k]X[k]^* = |X[k]|^2$$

Donde se asume secuencia finita de largo N para la señal $x[n]$.

e) Una posible solución:

```python
def DFT(x):
    N = len(x)
    X = np.zeros(N, dtype=np.complex128)
    for k in range(N):
        for n in range(N):
            X[k] += x[n] * np.exp(-2j * np.pi * n * k / (N))
    return X
```

Figura 5: DFT

f) Aplicando el resultado anterior, se obtiene:

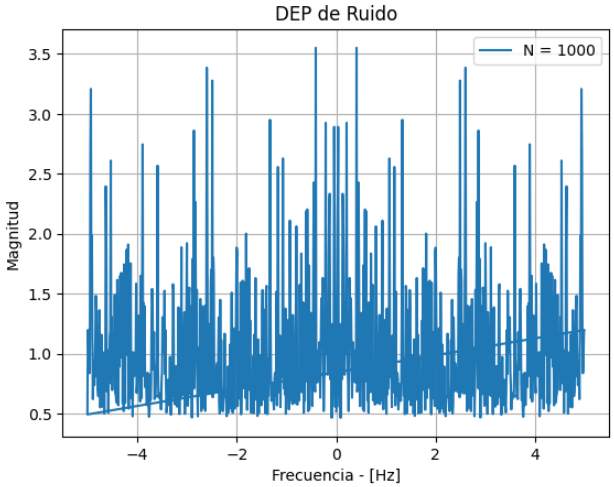


Figura 6: DEP del ruido

Como hay contenido espectral para todo rango de frecuencias, se dice que el ruido es **blanco**.

g) Al aplicar transformada inversa, se obtiene:

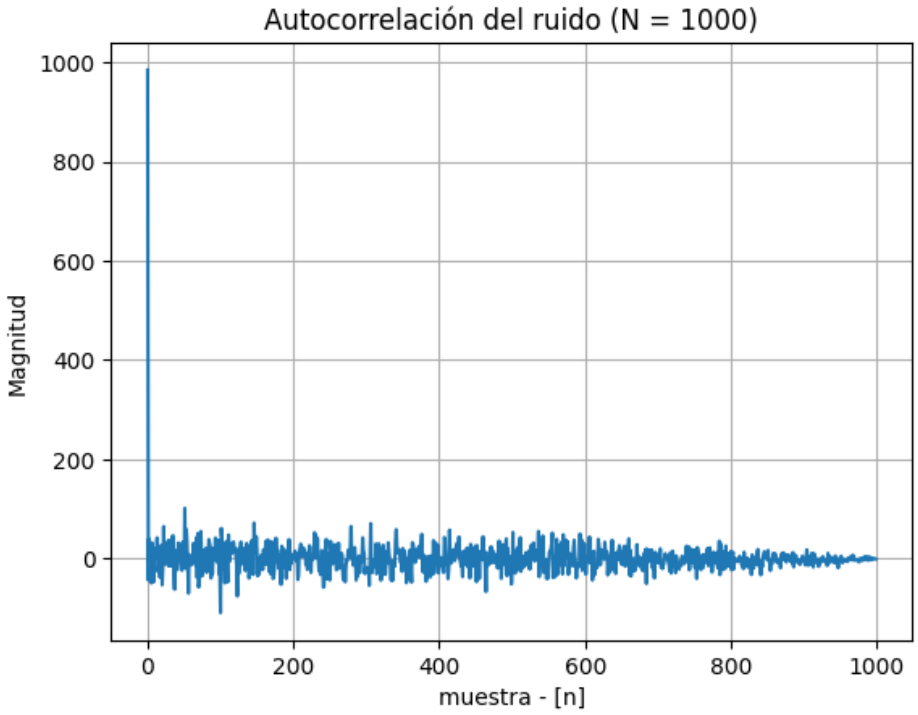


Figura 7: Autocorrelación del ruido

Lo anterior se asemeja a un impulso.