Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

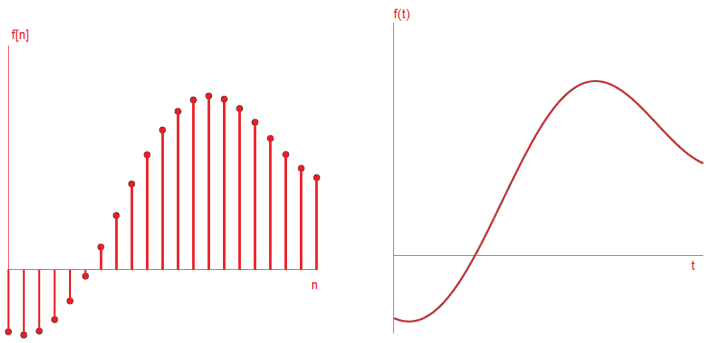
Tarea 9

Fecha de entrega: 8 de mayo de 2022

---

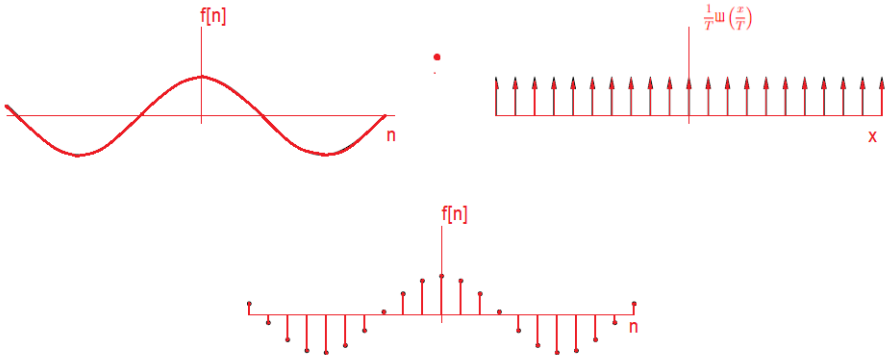
1. ¿Que es una señal discreta y en qué se diferencia de una señal continua?

   Una señal discreta es aquella que tiene como dominio solo elementos específicos y equiespaciados. Una señal discreta puede tomar cualquier valor en el eje vertical (recorrido) pero solo toma algunos valores en el eje horizontal (dominio). A continuación se muestran una señal discreta a la izquierda y una señal continua a la derecha:



2. Defina muestreo y enuncie qué función se emplea para muestrear.

   El muestreo es el proceso mediante el que una señal continua se transforma en una señal discreta. Este se logra multiplicando la señal continua a muestrear por un Shah (tren de impulsos) $\frac{1}{T}\text{lll}\left(\frac{x}{T}\right)$



3. Enuncie el teorema de Nyquist. Demuestre el teorema utilizando contenido estudiado en el curso.

   El teorema de Nyquist indica que si una señal continua es de ancho de banda limitado con frecuencia máxima f_{max}, el período máximo con el que se puede muestrear la señal para que esta se pueda reconstituir a la perfección es[1]:

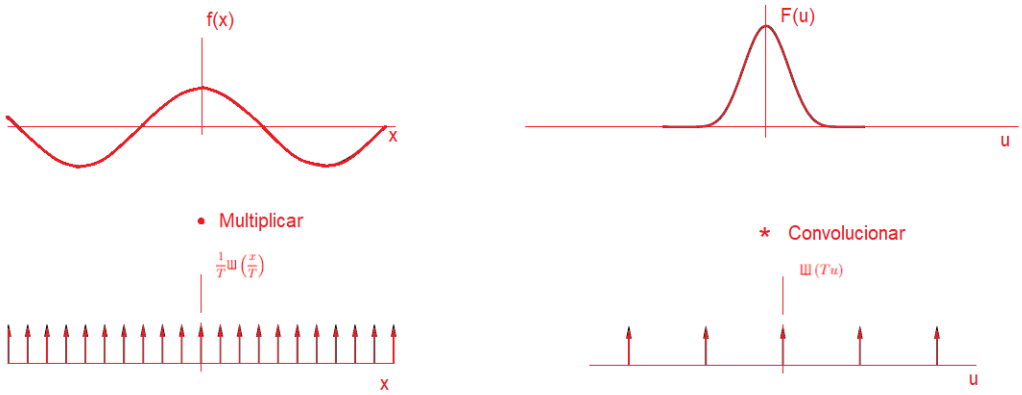
$$T < \frac{1}{2f_{max}}$$

   La demostración del teorema se puede realizar con solo contenidos vistos hasta ahora en el curso.

   Consideremos una señal cualquiera de ancho de banda limitado, a continuación se muestra la señal y su transformada de Fourier:

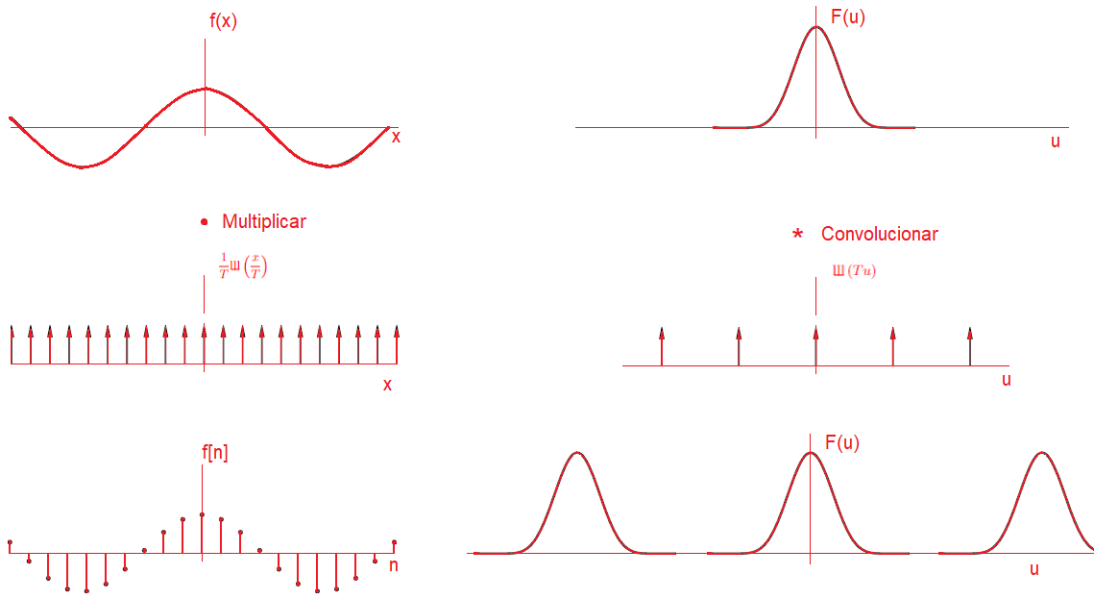


   Notemos que cuando estamos muestreando en el tiempo, estamos multiplicando por shah, por lo que, por propiedad de la multiplicación estamos convolucinando en Fourier:

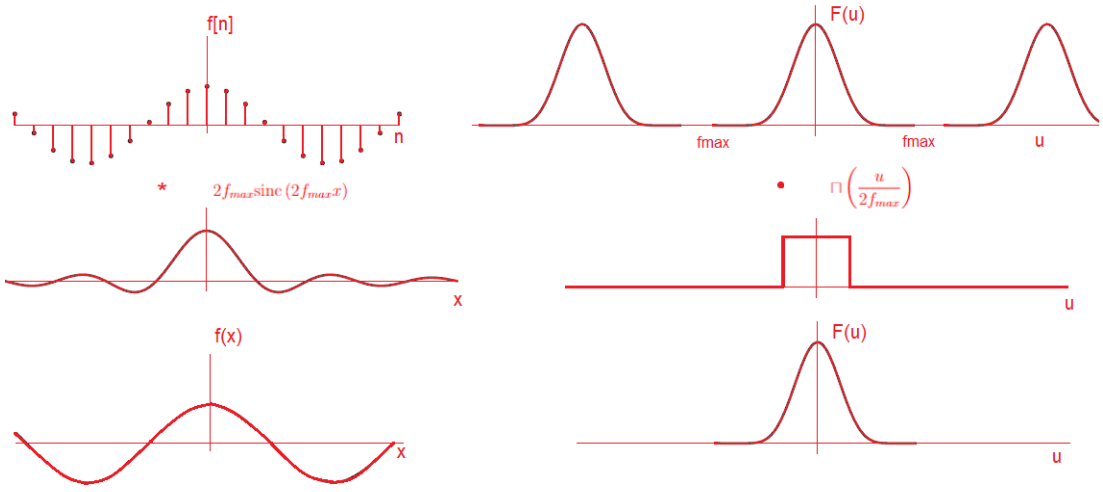


   Esto genera que en el tiempo se estén tomando muestras y en la frecuencia se esté periodizando:

[1] El teorema dice menor **estricto** y esto se debe respetar. Se explicó con ejemplos durante la ayudantía 5.



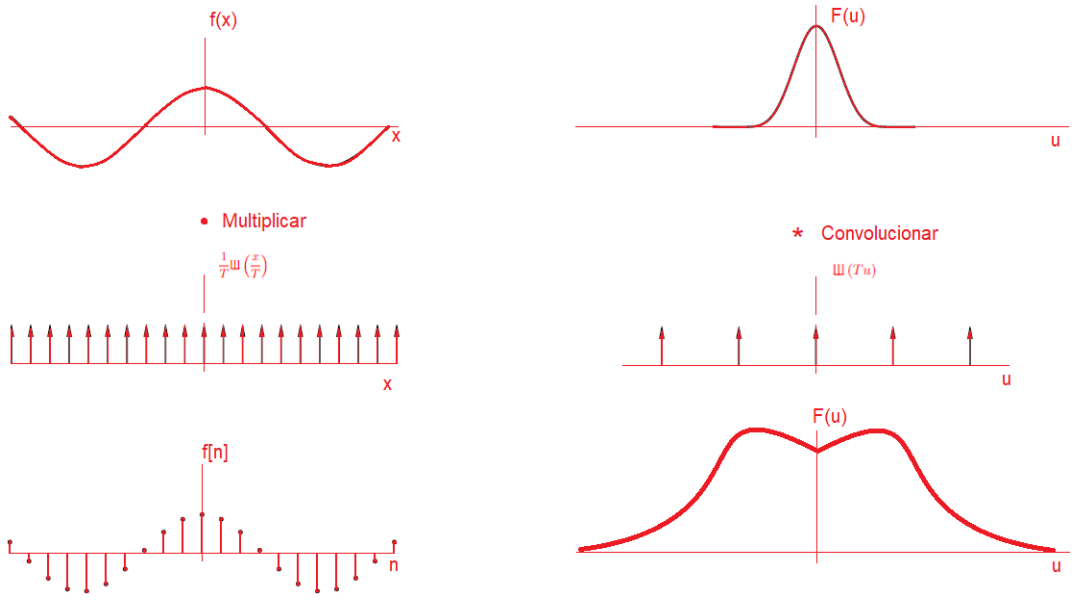
Observemos que para poder recuperar la forma continua de la señal, bastaría aplicar un filtro en frecuencia. Multiplicar por un rect del ancho de la banda permitiría recuperar la transformada de Fourier original, y por lo tanto, podríamos recuperar la señal original convolucionando con un sinc en el tiempo:



Notemos que para que esto sea posible es necesario que la convolución en la ferecuencia periodice sin generar *aliasión*. Esto significa que los impulsos del shah en Fourier deben estar lo suficientemente lejos entre sí para no generar que se distorsione la frecuencia.

4. Investigue cómo se llama el fenómeno que ocurre cuando se muestrea sin cumplir el teorema de Nyquist y decríbalo.

   El fenómeno generado cuando no se cumple el teorema de Nyquist de denomina **aliasing**. Esto ocurre cuando hay un sub muestreo y la señal muestreada no se puede reconstituir porque cuando no se respeta Nyquist.



5. Determine el período de muestreo crítico de las siguientes señales:

   a) $sinc(t)$

   Sabemos que la transformada de Fourier de un sinc es un rect. La frecuencia máxima del rect es $f_{max} = \frac{1}{2}$, luego:

   $$T < \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \rightarrow T < 1$$

   Esto significa que para muestrear un sinc y poder reconstituirlo, la distancia máxima posible que puede haber entre las muestras es $1 - \epsilon$ siendo ϵ un elemento infinitesimal.

   b) $\cos(6\pi t)$

   La frecuencia máxima de este coseno es $f_{max} = 3$. Luego, reemplazando esto en Nyquist:

   $$T < \frac{1}{2 \cdot 3} \rightarrow T < \frac{1}{6}$$

Esto significa que para muestrear un $\cos(6\pi t)$ y poder reconstituirlo, la distancia máxima posible que puede haber entre las muestras es $\frac{1}{6} - \epsilon$ siendo ϵ un elemento infinitesimal.

c) $1(t)$

Sabemos bien que la transformada de Fourier de la función 1 es δ. Esto significa que su frecuencia máxima es $f_{max} = 0$. Luego, reemplazo en Nyquist:

$$T < \frac{1}{2 \cdot 0} \rightarrow T < \lim_{x \to 0} \frac{1}{2x}$$

Es decir, T debe ser menor a infinito.

Viendo Nyquist de otra forma:

$$2f_{max} < \frac{1}{T}$$

Dado $f_{max} = 0$ tendremos:

$$\frac{1}{T} > 0$$

Notemos que esto se cumple **para cualquier valor de T**, ya que por definición el período de muestreo nunca va a ser negativo.

d) $sinc^2(t)$

Se demostró en la pauta de la tarea 5 que la transformada de Fourier de un $\text{sinc}^2(x)$ es $\wedge(u)$. Luego, la frecuencia máxima de $\text{sinc}^2(x)$ es $f_{max} = 1$. Aplicando esto en Nyquist:

$$T < \frac{1}{2 \cdot 1} \rightarrow T < \frac{1}{2}$$

Esto significa que para muestrear un $sinc^2(t)$ y poder reconstituirlo, la distancia máxima posible que puede haber entre las muestras es $\frac{1}{2} - \epsilon$ siendo ϵ un elemento infinitesimal.

6. ¿Es posible reconstituir a la perfección una señal muestreada cumpliendo Nyquist? Describa cómo

En teoría, es posible realizar la reconstrucción haciendo **interpolación sinc**, tal como esta fue descrita en la solución a la pregunta 3. **Sin embargo**, en la práctica, realizar una convolución con un sinc es complejo porque esta es infinita y usualmente las sumas no convergen.