Interrogación 1

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo tres hojas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre en todas las hojas que ocupe. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. (10 pts.) Funciones básicas

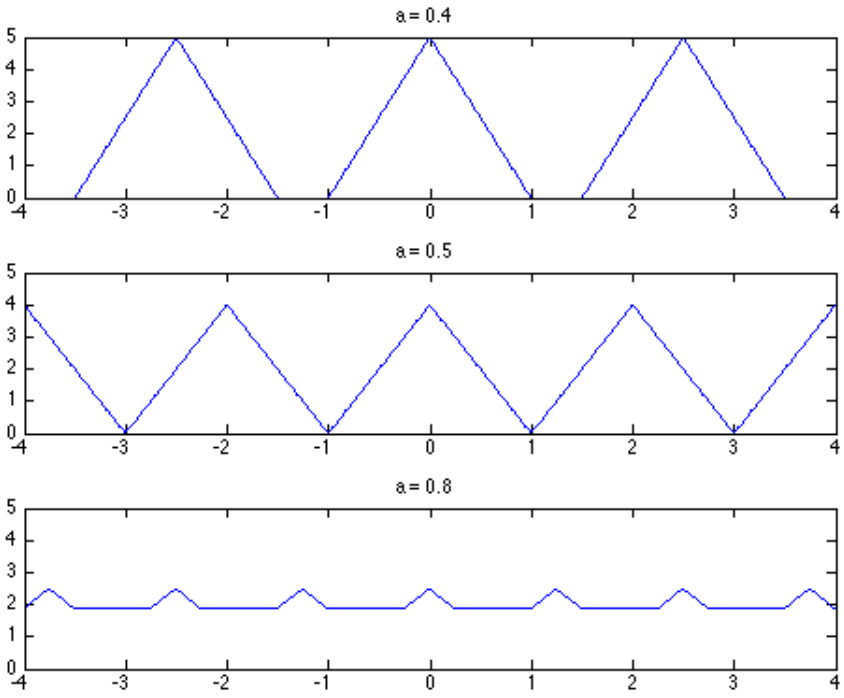
   (a) (4 pts.) Determine $\text{Ш}(ax) * \wedge(x)$. Grafique la convolución para todos los valores relevantes del parámetro a.

   Solución:

   Al convolucionar el $\wedge(x)$ con un Ш, éste se replica infinitamente en el eje x, con centros determinados por el parámetro a → **0.5 pts.** y además su amplitud se ve modificada en un factor $\frac{1}{|a|}$ → **0.5 pts.** . Dependiendo del valor de a, los triángulos pueden traslaparse o no.

   - Si $a < \frac{1}{2}$, los triángulos no se traslapan. → **1 pts.**
   - Si $a = \frac{1}{2}$, los triángulos están críticamente traslapados. → **1 pts.**
   - Si $a > \frac{1}{2}$, los triángulos se traslapan. → **1 pts.**

   En la siguiente figura se grafican los casos $a = 0.4$, $a = 0.5$ y $a = 0.8$.



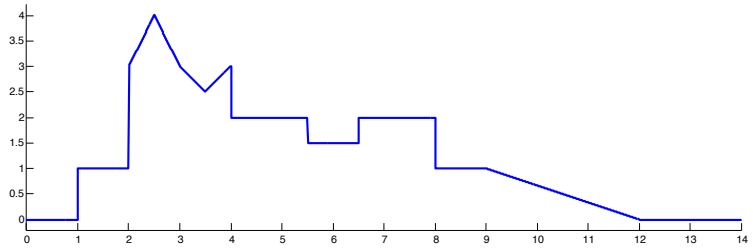
(b) (6 pts.) Sea $f(t) = \frac{b}{2} + \sum_{k=1}^{4573} [\sin(2k\pi f_c t) + \cos(2k\pi f_c t)]$. Determine todos los $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $f(t) * \sqcap(at) \equiv 0$

Solución:

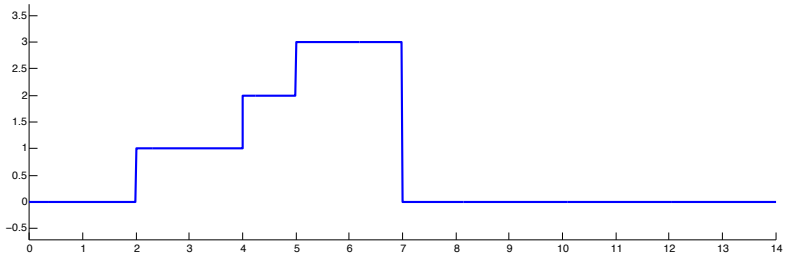
La función $f(t)$ es periódica de período fundamental $T = \frac{1}{f_c}$ → **2 pts.** . Para que el resultado de la convolución sea cero, el $\sqcap$ debe tener un ancho igual a T, es decir $a = f_c$ → **1 pts.**, o bien cualquier múltiplo de T, es decir $a = kf_c$, con $k = 1, 2, \ldots$ → **1 pts.** .

El componente de frecuencia cero también debe ser cero, es decir $b = 0$. → **2 pts.**

2. (8 pts.) La función Gato(x) de la Interrogación 1 del semestre anterior sufrió un accidente que alteró una de sus orejas y su lomo, quedando de la forma que se muestra en la figura.



Para más remate, luego de este accidente, se tropezó con la escalera de la figura a continuación, lo que provocó que Gato(x) se convolucionara con ella.



(a) (2 pts.) Determine una expresión analítica para el Gato accidentado antes de tropezar con la escalera.

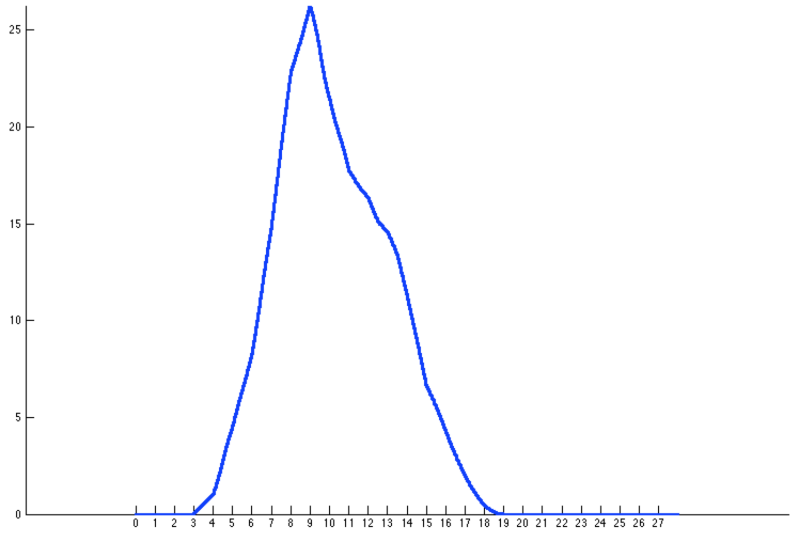
(b) (6 pts.) Encuentre gráfica o analíticamente la convolución del Gato accidentado con la escalera.

Solución:

Esta función puede escribirse de muchas maneras distintas. Una de éstas es:

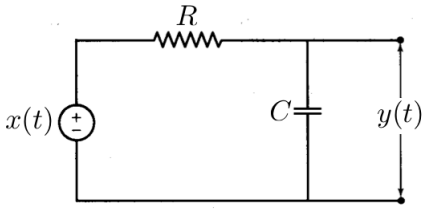
$$\sqcap\left(\frac{x-5}{8}\right)+\sqcap\left(\frac{x-5}{6}\right)+\sqcap\left(\frac{x-3}{2}\right)+\wedge(2x-5)-0.5\wedge(2x-7)-0.5\sqcap(x-6)+\sqcap\left(\frac{x-10.5}{3}\right)\times\left(4-\frac{x}{3}\right)\rightarrow$$ **2 pts.**

La forma más simple de calcular la convolución de Gato(x) con la escalera es en forma gráfica, y se muestra a continuación:



→ **6 pts.**

3. (8 pts.) Considere el siguiente circuito RC con capacitancia R y C dadas, donde la entrada es $x(t)$ y la salida es $y(t)$.



(a) (1 pto.) Escriba la ecuación diferencial asociada.

(b) (1 pto.) Determine y_0 tal que si $y(0) = y_0$, entones el sistema sea LTI.

(c) (2 ptos.) Resuelva la ecuación para $x(t) = \alpha \operatorname{sen}(\omega t)$ para el y_0 obtenido.

(d) (4 ptos.) Sea $y^*(t)$ la respuesta forzada del sistema. Grafique $\dfrac{y^*(t)}{x(t)}$ en función de ω. Comente sobre el comportamiento de este circuito.

Solución:

(a) La ecuación diferencial es

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(b) Para que el sistema sea LTI, el condensador debe estar descargado en el tiempo t_0 lo que implica que $y_0 = 0 \rightarrow$ **1 pts.**.

(c) La solución homogenea del sistema es:

$$y_h(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

Asumimos una solución particular de la forma:

$$y_p(t) = B_1 \operatorname{sen}(\omega t) + B_2 \cos(\omega t)$$

Reemplazando la solución particular en la ecuación tenemos que

$$\frac{d}{dt}[B_1 \operatorname{sen}(\omega t) + B_2 \cos(\omega t)] + \frac{B_1}{RC} \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{B_2}{RC} \cos(\omega t) = \frac{\alpha}{RC} \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$B_1\omega \cos(\omega t) - B_2\omega \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{B_1}{RC} \operatorname{sen}(\omega t) + \frac{B_2}{RC} \cos(\omega t) = \frac{\alpha}{RC} \operatorname{sen}(\omega t)$$

Igualando coeficientes, tenemos que

$$B_1\omega + \frac{B_2}{RC} = 0$$

y

$$-B_2\omega + \frac{B_1}{RC} = \frac{\alpha}{RC}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, tenemos que $\rightarrow$ **1 pts.**

$$B_1 = \frac{\alpha}{R^2C^2\omega^2 + 1}$$

y

$$B_2 = -\frac{\alpha RC\omega}{R^2C^2\omega^2 + 1}$$

Para calcular la constante A consideramos $y(0) = 0$ y evaluamos la solución en $t = 0$:

$$-\frac{\alpha RC\omega}{R^2C^2\omega^2 + 1} + A = 0$$

por lo que

$$A = \frac{\alpha RC\omega}{R^2C^2\omega^2 + 1}$$

Por lo que la solución general es

$$\boxed{y(t) = \frac{\alpha}{R^2C^2\omega^2 + 1} \operatorname{sen}(\omega t) - \frac{\alpha RC\omega}{R^2C^2\omega^2 + 1} \cos(\omega t) + \frac{\alpha RC\omega}{R^2C^2\omega^2 + 1} e^{-\frac{t}{RC}}} \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

(d) Para responder esta pregunta, primero veamos que sucede cuando la entrada es $x(t) = e^{-i\omega t}$. Si sistema es LTI sabemos que la respuesta a esta entrada debe ser necesariamente esta misma exponencial amplificada por un factor complejo, dado que las exponenciales complejas son autofunciones de los sistemas LTI. La salida forzada del sistema en este caso se puede escribir como

$$y^*(t) = Ke^{-i\omega t}$$

Reemplazando en la ecuación:

$$-i\omega Ke^{-i\omega t} + \frac{K}{RC}e^{-i\omega t} = \frac{1}{RC}e^{-i\omega t}$$

Por lo que la constante es

$$K = \frac{1}{1 - i\omega RC}$$

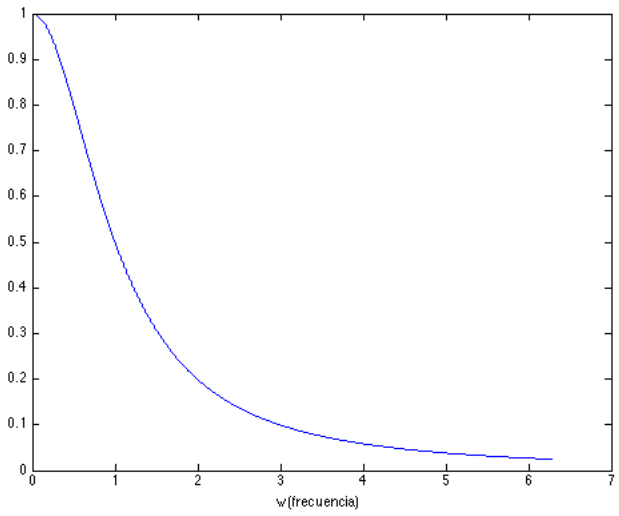
Es decir

$$y^*(t) = \frac{1}{1 - i\omega RC}e^{-i\omega t} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Dividiendo $y^*(t)$ por la entrada $x(t) = e^{-i\omega t}$:

$$\boxed{\frac{y^*(t)}{x(t)} = \frac{1}{1 - i\omega RC}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Para simplificar el gráfico en función de ω, asumimos $RC = 1$ y graficamos el módulo de esta función compleja desde $w = 0$ a $w = 2\pi$:

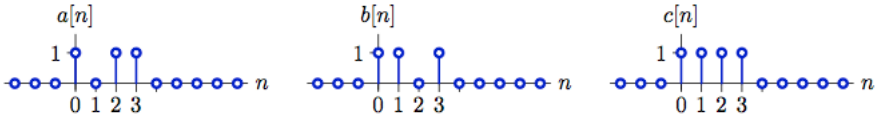


Se observa claramente que este circuito se comporta como un filtro pasabajos en la frecuencia → **1 pts.** Es decir, al entrar una exponencial compleja de frecuencia ω

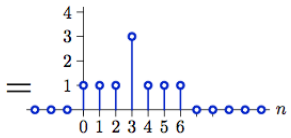
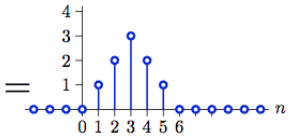
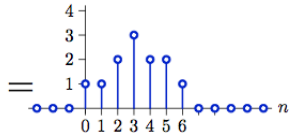
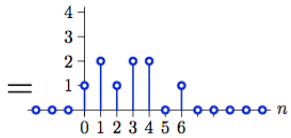
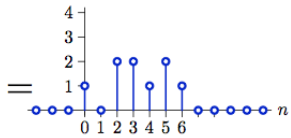
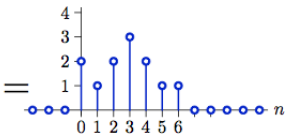
al sistema, esta exponencial se atenua en un factor inversamente proporcional a esta frecuencia.

Para extender este análisis a la entrada $x(t) = \alpha \operatorname{sen}(\omega t)$, notamos que esta función es simplemente una suma de exponenciales complejas y por linealidad, el análisis anterior podemos extenderlo para este caso. $\rightarrow$ **1 pts.**

4. (12 pts.) Considere las señales $a[n]$, $b[n]$, $c[n]$ de acuerdo a la siguiente figura[1]:



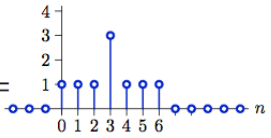
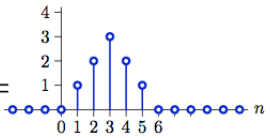
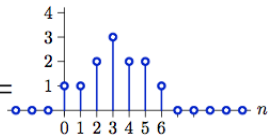
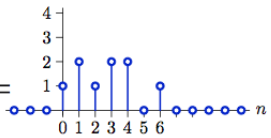
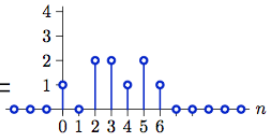
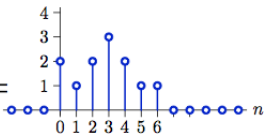
Determine si cada una de las señales siguientes se puede construir mediante la convolución de un par de las señales anteriores. Indique en la tabla que señales deben convolucionarse. Si la señal necesaria para la convolución no existe, indíquela con una X.

	*		= 
	*		= 
	*		= 
	*		= 
	*		= 
	*		= 

[1]Dennis Freeman, 6.003 Signals and Systems, Fall 2011. (MIT OpenCourseWare: Massachusetts Institute of Technology), `http://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-003-signals-and-systems-fall-2011/` (Accesado Oct. 10 2011). Licencia: Creative commons BY-NC-SA

Solución:

Podemos observar que como $a[0] = b[0] = c[0] = 1$, la convolución de cualquier par de estas señales debe necesariamente dar 1 en $n = 0$.

a (b)	$*$	b (a)	$=$ 	$\rightarrow$ **2 pts.**
X	$*$	X	$=$ 	$\rightarrow$ **2 pts.**
a (c)	$*$	c (a)	$=$ 	$\rightarrow$ **2 pts.**
b	$*$	b	$=$ 	$\rightarrow$ **2 pts.**
a	$*$	a	$=$ 	$\rightarrow$ **2 pts.**
X	$*$	X	$=$ 	$\rightarrow$ **2 pts.**

5. (8 pts.) Considere la ecuación diferencial de primer orden:

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{2}y(t) = x(t)$$

con $x(t) = e^{-t}\sqcap(t)$.

(a) (2 pts.) Determine la familia de señales $y(t)$ que satisfacen la ecuación homogénea asociada.

(b) (2 pts.) Represente el sistema en un diagrama de bloques

(c) (2 pts.) Asuma para $t > 0$ una solución de la forma $y_1(t) = Ae^{-t}$. Determine el valor de A.

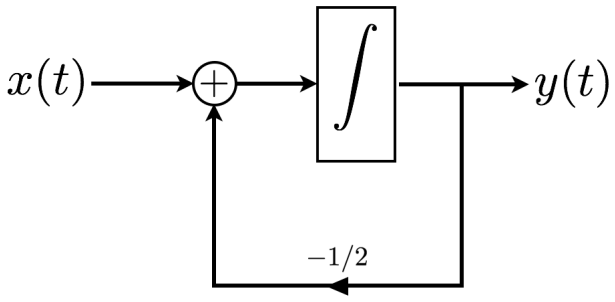
(d) (2 pts.) Muestre que $y_1(t) = [2e^{-t/2} - 2e^{-t}]\sqcap(t)$ es una solución para todo t.

Solución:

(a) Utilizando el operador p, tenemos el polinomio $p + \frac{1}{2} = 0$, por lo que $p = -\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ **1 pts.**. Por lo tanto la familia de señales que satisfacen la ecuación homogénea es:

$$\boxed{y(t) = Ke^{-\frac{t}{2}}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(b) Utilizando integradores:



$\rightarrow$ **2 pts.**

(c) Sustituyendo la solución en la ecuación diferencial tenemos para $t > 0$.

$$\frac{d}{dt}Ae^{-t} + \frac{1}{2}Ae^{-t} = e^{-t}$$

$$-Ae^{-t} + \frac{A}{2}e^{-t} = e^{-t} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Igualando coeficientes, tenemos entonces

$$-A + \frac{A}{2} = 1$$

es decir, $\boxed{A = -2}$ $\rightarrow$ **1 pts.**.

(d) Tomando la derivada de $y_1(t)$ tenemos

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = \begin{cases} 2(-\frac{1}{2})e^{-\frac{t}{2}} - 2(-1)e^{-t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Agregando el término $\frac{1}{2}y_1(t)$:

$$\boxed{\frac{dy_1(t)}{dt} + \frac{1}{2}y_1(t) = \begin{cases} (-e^{-\frac{t}{2}} + 2e^{-t}) + \frac{1}{2}(2e^{-\frac{t}{2}} - 2e^{-t}) = e^{-t} = x(t), & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}}$$

6. (8 pts.) Sistemas discretos

(a) (4 pts.) Sea $x[n] = (\frac{1}{3})^n \sqcap[n] + 4^n \sqcap[-n]$, la entrada a un sistema caracterizado por su respuesta al impulso $h[n]$. Encuentre la salida si $h[n] = \sqcap[n]$.

(b) (4 pts.) Considere el sistema $y[n] = -ay[n-1] + bx[n]$. Determine la salida del sistema cuando la entrada es $x[n] = a^{-n}\sqcap[n] + b^{-n}\sqcap[n]$, con $y[-1] = 0$, $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$.

Solución:

(a) Utilizando la propiedad distributiva de la convolución podemos separar la señal $x[n]$ en dos. Sean $x_1[n] = (\frac{1}{3})^n \sqcap[n]$ y $x_2[n] = 4^n \sqcap[-n]$, de tal manera que $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$. Entonces podemos calcular la salida como

$$y[n] = (x_1[n] + x_2[n]) * h[n] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Calculemos primero $y_1[n] = x_1[n] * h[n]$. Para esta convolución notamos que

$$x_1[k]h[n-k] = \begin{cases} \frac{1}{3}^k, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces la convolución se puede calcular de la siguiente forma para $n \geq 0$:

$$y_1[n] = \sum_{k=0}^{n} (\frac{1}{3})^k = \frac{1 - (\frac{1}{3})^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$$

Por lo tanto

$$\boxed{y_1[n] = \frac{1 - (\frac{1}{3})^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} \sqcap[n] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}}$$

Para calcular $y_2[n] = x_2[n] * h[n]$, notamos que $x_2[k] = 0$ para $k > 0$ y $h[n-k] = 0$ para $k > n$. A diferencia del caso anterior, la secuencia $x_2[k]h[n-k]$ toma siempre valores distintos de cero sin importar el valor de n.

Entonces, para $n \geq 0$

$$y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{0} 4^k = \sum_{j=0}^{\infty} (\frac{1}{4})^j = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

Para $n < 0$

$$y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} 4^k \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Podemos hacer los cambios de variable $l = -k$ y $m = l + n$, con lo que

$$y_2[n] = \sum_{l=-n}^{\infty} (\frac{1}{4})^l = \sum_{m=0}^{\infty} (\frac{1}{4})^{m-n} = (\frac{1}{4})^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} (\frac{1}{4})^m = 4^n \times \frac{4}{3} = \frac{4^{n+1}}{3} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Es decir

$$y_2[n] = \frac{4}{3}\sqcap[n] + 4^{n+1}\sqcap[-n]$$

Finalmente,

$$\boxed{y[n] = \frac{1-(\frac{1}{3})^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\sqcap[n] + \frac{4}{3}\sqcap[n] + \frac{4^{n+1}}{3}\sqcap[-n]}$$

(b) Para $n \geq 0$, podemos asumir una solución particular de la forma

$$y_p[n] = Ba^{-n} + Cb^{-n}$$

Reemplazando en la ecuación:

$$Ba^{-n} + Cb^{-n} + a(Ba^{-(n-1)} + Cb^{-(n-1)}) = b(a^{-n} + b^{-n})$$

Agrupando términos tenemos

$$Ba^{-n} + Cb^{-n} + Ba^{-n+2} + Cab^{-n+1} = ba^{-n} + b^{-n+1}$$

$$Ba^{-n} + Cb^{-n} + Ba^2a^{-n} + Cabb^{-n} = ba^{-n} + b^{-n}b$$

$$a^{-n}(B + Ba^2 - b) + b^{-n}(C + Cab - b) = 0$$

Por lo que los coeficientes son

$$B = \frac{b}{1+a^2}$$

y

$$C = \frac{b}{1+ab}$$

Por lo que la solución particular es:

$$y_p[n] = \frac{b}{1+a^2}a^{-n} + \frac{1}{1+ab}b^{-n+1} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

La solución homogénea es de la forma

$$y_h[n] = A(-a)^n$$

Para calcular la constante A evaluamos en $n = 0$. Tenemos que

$$y[0] = -a[y-1] + bx[0]$$

Como $x[0] = 2$ y $y[-1] = 0$, entonces

$$y[0] = 2b$$

Evaluando la solución homogenea en $n = 0$

$$y_h[0] = A(-a)^0 = 2b$$

por lo que $A = 2b \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$
De esta forma, la solución general es

$$\boxed{y[n] = 2b(-a)^n \sqcap[n] + \frac{b}{1+a^2}a^{-n}\sqcap[n] + \frac{1}{1+ab}b^{-n+1}\sqcap[n]} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

7. (BONUS 6 pts.) Impulsos. Determine la validez de las siguientes igualdades:

   (a) (3 pts.) $x\delta'(x) = -\delta(x)$
   (b) (3 pts.) $\delta(x) = (1-e^x)\delta'(x)$.

Solución:

Ambas igualdades son ciertas y se pueden probar utilizando simplemente la derivada del producto.

(a) Podemos escribir

$$x\delta'(x) = \frac{d}{dx}[x\delta(x)] - \delta(x) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Sabemos ademas que $f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$, $\rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$ por lo que

$$\frac{d}{dx}[x\delta(x)] = 0$$

Por lo tanto, queda

$$\boxed{x\delta'(x) = -\delta(x)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(b) Podemos proceder exactamente de la misma forma anterior:

$$(1-e^x)\delta'(x) = \frac{d}{dx}[(1-e^x)\delta(x)] - \frac{d}{dx}[1-e^x]\delta(x) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Sabemos que

$$(1-e^x)\delta(x) = (1-e^0)\delta(x) = 0 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

y que

$$\frac{d}{dx}[1-e^x] = -e^x$$

luego

$$(1-e^x)\delta'(x) = e^x\delta(x) = e^0\delta(x)$$

o sea,

$$\boxed{(1-e^x)\delta'(x) = \delta(x)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$