Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica

IEE 2102 ANALISIS DE SEÑALES 2006-2

INTERROGACION Nº 2

1. Realizando pruebas experimentales se ha determinado que la Transformada de Fourier de la respuesta al impulso de un sistema dinámico corresponde a la función que se presenta en la figura 1.

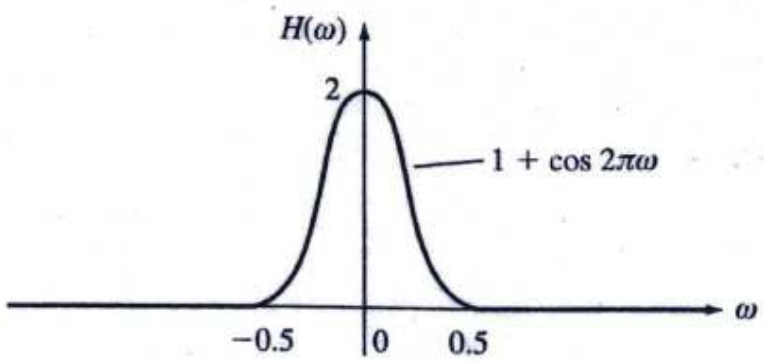


Figura 1

1.1 Obtenga la función respuesta al impulso $h(t)$ del sistema dinámico.

1.2 Utilizando Transformada de Fourier, obtenga la respuesta en el tiempo $y(t)$ correspondiente a la entrada $x(t) = sinc(t/2\pi)$.

1.3 Grafique $h(t), x(t), y(t)$. Qué características especiales presenta el sistema dinámico?

2. En la figura 2, $x(t) = x_1(t)cos(\omega_c t) + x_2(t)sin(\omega_c t)$, con $\omega_c = 50\ rad/seg$. Las señales $x_1(t), x_2(t)$ presentan un ancho de banda $B = 500\ rad/seg$.

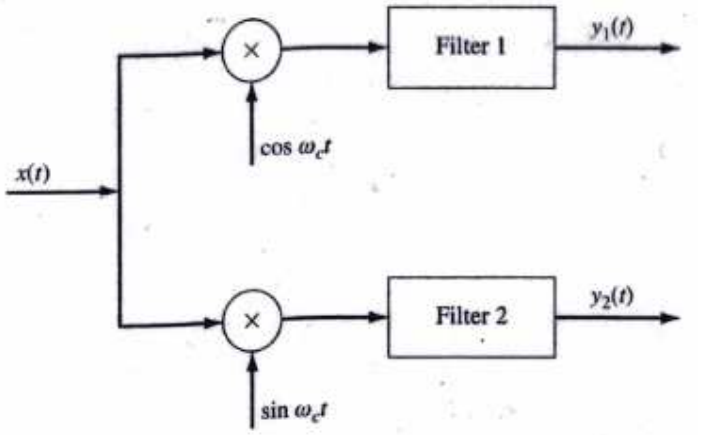


Figura 2

Se pide diseñar los filtros 1 y 2 de forma que $y_1(t) = x_1(t), y_2(t) = x_2(t)$. Justifique su diseño mostrando el espectro de amplitud de todas las señales.

3. En la figura 3 se sabe que la función de transferencia del sistema 1 es:

$$H_1(s) = \frac{(s+4)}{(s+2)(s+3)}$$

y que la respuesta al impulso del sistema 2 es:

$$h_2(t) = \left(\frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t} \right) u(t) .$$

Se pide:

3.1 La función de transferencia del sistema en cascada (es decir, del sistema completo).

3.2 La función respuesta al impulso del sistema en cascada.

3.3 El gráfico aproximado de la respuesta $y(t)$ del sistema en cascada para la entrada $x(t) = 2u(t-1)$, con $u(t)$ el escalón unitario. Suponga condiciones iniciales nulas.

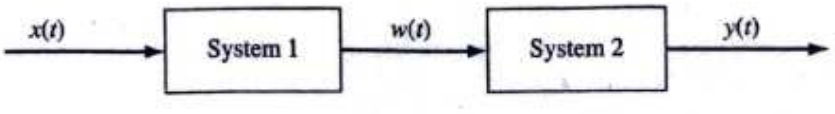


Figura 3

Observaciones.
Tiempo 2 horas. No se aceptan consultas; en caso que tenga dudas sobre alguna pregunta, responda indicando claramente las suposiciones que hace. Puede utilizar apuntes pero no calculadora. Responda cada pregunta en hojas separadas. No olvide indicar su nombre en cada hoja. Las 3 preguntas tienen igual ponderación.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica

IEE 2102 ANALISIS DE SEÑALES 2006-2

PAUTA INTERROGACION Nº 2

Problema 1

Como punto de partida se define analíticamente la función $\boldsymbol{H(\omega)}$

$$\boldsymbol{H(\omega) = (1+\cos(2\pi\omega))\cdot(u(\omega+0.5)-u(\omega-0.5))}$$ 0.6 ptos

1.1 Máximo 1,8 puntos

Para encontrar h(t), se calcula la transformada inversa de Fourier de $\boldsymbol{H(\omega)}$.

$$H(\omega) = u(\omega+0.5)-u(\omega-0.5)+\cos(2\pi\omega)u(\omega+0.5)-\cos(2\pi\omega)u(\omega-0.5)$$

$$\Im^{-1}\{u(\omega+0.5)\} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}jt}[\delta(t)+\frac{j}{\pi t}]$$

$$\Im^{-1}\{u(\omega-0.5)\} = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}jt}[\delta(t)+\frac{j}{\pi t}]$$

$$\Im^{-1}\{u(\omega-0.5)\cos(2\pi\omega)\} = \frac{1}{4}\delta(t-2\pi)+\frac{1}{4}\delta(t+2\pi)+\frac{j\cdot t\cdot e^{\frac{1}{2}jt}}{2\pi(2\pi-t)(2\pi+t)}$$

$$\Im^{-1}\{u(\omega+0.5)\cos(2\pi\omega)\} = \frac{1}{4}\delta(t-2\pi)+\frac{1}{4}\delta(t+2\pi)+\frac{j\cdot t\cdot e^{-\frac{1}{2}jt}}{2\pi(2\pi-t)(2\pi+t)}$$

0.3 ptos cada trasformada inversa

Luego,

0.6 ptos cualquiera de los dos resultados

$$h(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}jt}[\delta(t)+\frac{j}{\pi t}]-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}jt}[\delta(t)+\frac{j}{\pi t}]-\frac{j\cdot t\cdot e^{\frac{1}{2}jt}}{2\pi(2\pi-t)(2\pi+t)}+\frac{j\cdot t\cdot e^{-\frac{1}{2}jt}}{2\pi(2\pi-t)(2\pi+t)}$$

o bien,

$$h(t) = \frac{4\pi\sin(0.5t)}{(2\pi-t)(2\pi+t)t}$$

1.2 Máximo 2,4 puntos

Calculamos la transformada de Fourier de x(t), luego hacemos el producto $\boldsymbol{H(\omega)X(\omega)}$, obteniendo así $\boldsymbol{Y(\omega)}$, para finalmente aplicar la transformada inversa de Fourier para llegar a y(t).

$$\boldsymbol{X(\omega)=\Im\{x(t)\}=\Im\{\sin c(t/2\pi)\}=2\pi[u(\omega+0.5)-u(\omega-0.5)]}$$

0.8 ptos

$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)=(1+\cos(2\pi\omega))\cdot(u(\omega+0.5)-u(\omega-0.5))\cdot(2\pi(u(\omega+0.5)-u(\omega-0.5)))$$

$$Y(\omega)=2\pi\cdot u(\omega+0.5)-2\pi\cdot u(\omega-0.5)+2\pi\cdot u(\omega+0.5)\cos(2\pi\omega)-2\pi\cdot\cos(2\pi\omega)u(\omega-0.5)$$

0.8 ptos

$$\Im^{-1}\{2\pi\cdot u(\omega+0.5)\}=e^{-\frac{1}{2}jt}(\pi\delta(t)+\frac{j}{t})$$

$$\Im^{-1}\{2\pi\cdot u(\omega-0.5)\}=e^{\frac{1}{2}jt}(\pi\delta(t)+\frac{j}{t})$$

$$\Im^{-1}\{2\pi\cdot u(\omega-0.5)\cos(2\pi\omega)\}=\frac{\pi}{2}\delta(t-2\pi)+\frac{\pi}{2}\delta(t+2\pi)+\frac{j\cdot t\cdot e^{\frac{1}{2}jt}}{(2\pi-t)(2\pi+t)}$$

$$\Im^{-1}\{2\pi\cdot u(\omega+0.5)\cos(2\pi\omega)\}=\frac{\pi}{2}\delta(t-2\pi)+\frac{\pi}{2}\delta(t+2\pi)+\frac{j\cdot t\cdot e^{-\frac{1}{2}jt}}{(2\pi-t)(2\pi+t)}$$

Entonces

$$y(t)=\Im^{-1}\{Y(w)\}=(\pi\delta(t)+\frac{j}{t})(e^{-\frac{1}{2}jt}-e^{\frac{1}{2}jt})+\frac{j\cdot t}{(2\pi-t)(2\pi+t)}(e^{-\frac{1}{2}jt}-e^{\frac{1}{2}jt})$$

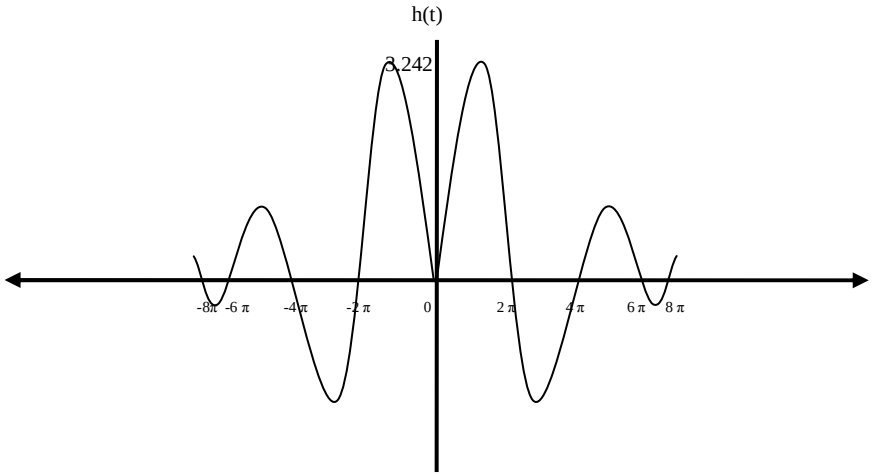
O bien

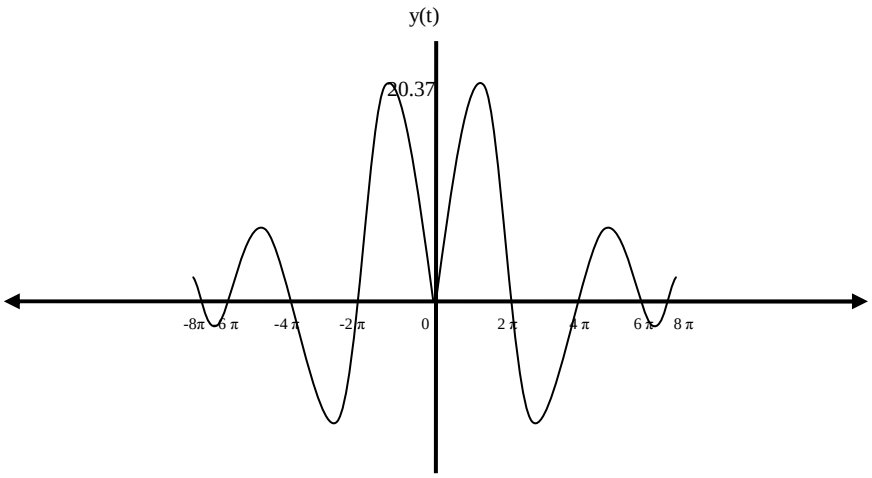
$$y(t)=\frac{8\pi^2\sin(0.5t)}{(t+2\pi)(2\pi-t)t}=\frac{4\pi^2\sin c(0.5t)}{(t+2\pi)(2\pi-t)}=\frac{1}{2}[\sin c(\frac{2\pi-t}{2\pi})+\sin c(\frac{2\pi+t}{2\pi})]+\sin c(\frac{t}{2\pi})$$

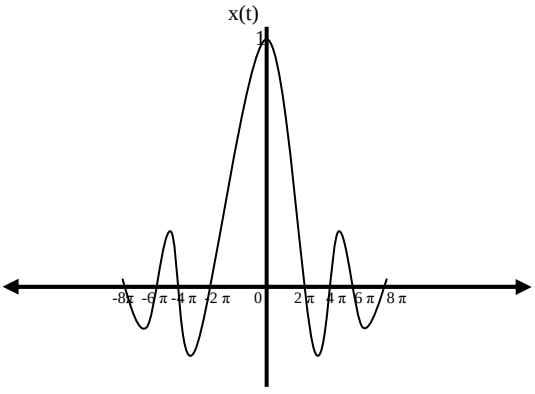
0.8 ptos

1.3 Máximo 1,2 puntos

El sistema es no causal, y no presenta impulsos. (0.3 ptos)
Los gráficos pedidos son los siguientes: (0.3 ptos cada uno)







Problema 2

Al aplicar Fourier a

$$x(t) = x_1(t)\cos(\omega_c t) + x_2(t)\sin(\omega_c t)$$

obtenemos:

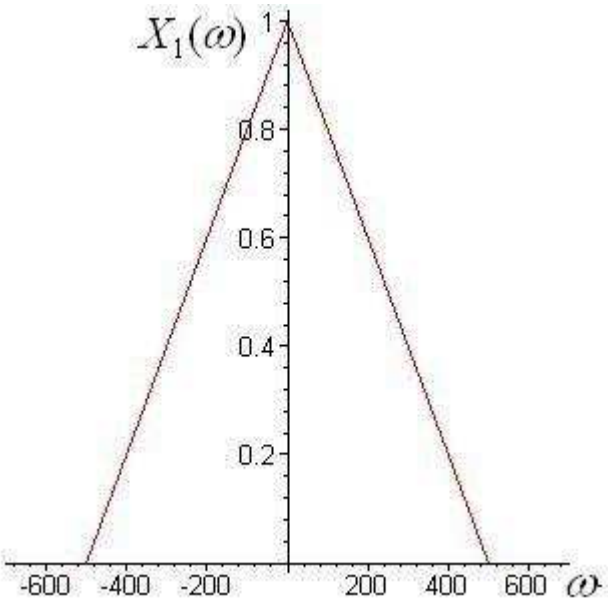
$$X(\omega) = \frac{1}{2}(X_1(\omega-\omega_c) + X_1(\omega+\omega_c)) + \frac{1}{2j}(X_2(\omega+\omega_c) - X_2(\omega-\omega_c))$$

Obteniendo el módulo de $|X(\omega)|$ se tiene:

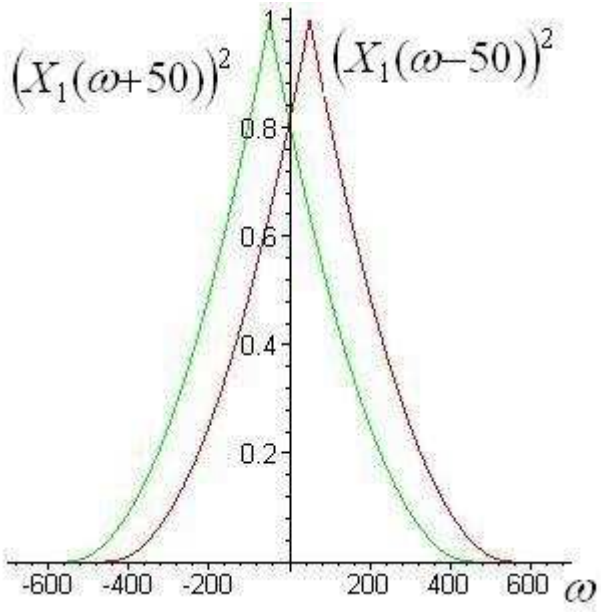
$$|X(\omega)| = \frac{1}{2}\sqrt{(X_1(\omega-\omega_c) + X_1(\omega+\omega_c))^2 + (X_2(\omega-\omega_c) - X_2(\omega+\omega_c))^2}$$

$$(|X(\omega)|)^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}(X_1(\omega-\omega_c))^2 + (X_1(\omega+\omega_c))^2 + 2(X_1(\omega-\omega_c))(X_1(\omega+\omega_c)) + \\ (X_2(\omega-\omega_c))^2 + (X_2(\omega+\omega_c))^2 - 2(X_2(\omega-\omega_c))(X_2(\omega+\omega_c))\end{pmatrix}$$

Supongamos que $X_1(\omega)$ es de la siguiente forma:



Se puede ver que las componentes $(X_1(\omega-50))^2$ y $(X_1(\omega+50))^2$ al ser sumadas claramente producen traslapo por lo que existe una pérdida de información.

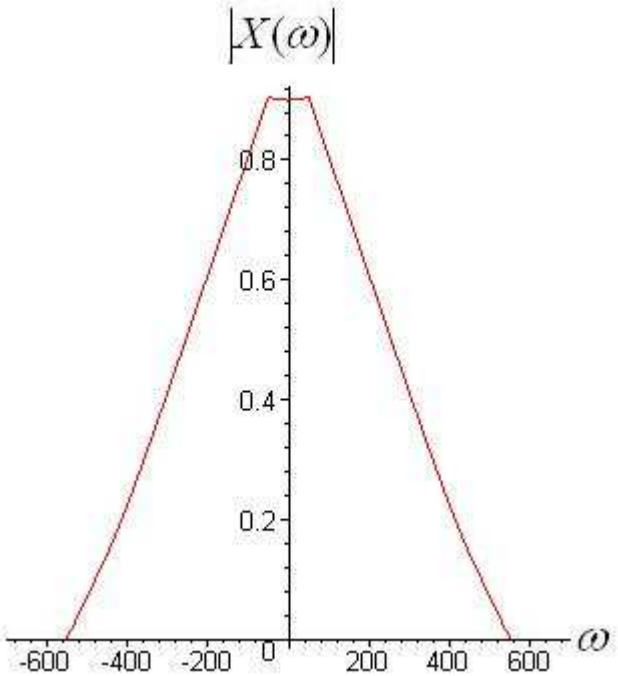


Si suponemos que $X_2(\omega)$ es de la misma forma que $X_1(\omega)$, entonces también se concluye que hay traslapo entre $\left(X_2(\omega-50)\right)^2$ y $\left(X_2(\omega+50)\right)^2$.

Si consideramos que al multiplicar $X(\omega)$ por $\cos(\omega_c t)$ lo único que se hace es trasladar el espectro, esto produce mayor traslapo ya que $\omega_c = 50$, por lo que es imposible recuperar la señal a través de filtros.

Lo mismo pasa con $\sin(\omega_c t)$, solamente que este trasladado el espectro pero en el plano imaginario.

Al final el modulo de $X(\omega)$ se ve así:



En el grafico claramente se ve que no se puede distinguir $X_1(\omega)$ por lo que es imposible recuperar la señal con un simple filtro.

En la corrección se asignó puntaje por el espectro de amplitud de las señales, y por la conclusión sobre el diseño.

Problema 3

3.1) 2 ptos máximo.

Encontrar la transformada de Laplace de $h_2(t) = \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t}$

$$L\left(\frac{2}{3}e^{-t}\right) = \frac{2}{3}\frac{1}{(s+1)}$$
$$L\left(-\frac{1}{2}e^{-2t}\right) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(s+2)}$$
$$L\left(-\frac{1}{6}e^{-4t}\right) = -\frac{1}{6}\frac{1}{(s+4)}$$

Luego:

$$H_2(s) = \frac{2}{3}\frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s+2)} - \frac{1}{6}\frac{1}{(s+4)}$$

$$H_2(s) = \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

La función de transferencia del sistema en cascada es $\mathrm{H}(s) = H_1(s)\,H_2(s)$

$$\mathrm{H}(s) = \frac{1}{(s+2)^2\,(s+1)}$$

La cancelación del cero/polo en s=-*3* es posible por ser estable.

3.2) 2 ptos máximo

Descomponemos H(s) en fracciones parciales:

$$\mathrm{H}(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{s+1}$$

Aplicando el método de cálculo de residuos: $A = -1$; $B = -1$; $C = 1$

Luego:

$$\mathrm{H}(s) = -\frac{1}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{s+1}$$

Por lo tanto:

$$h(t) = (-e^{-2t} - te^{-2t} + e^{-t})u(t)$$

3.3) 2 ptos máximo

Sabemos que $y(t) = x(t) * h(t)$ y que $Y(s) = X(s)\,H(s)$

$$H(s) = \frac{1}{(s+2)^2\,(s+1)}\,.$$

Calculamos $X(s)$:

$$x(t) = 2u(t-1)$$

$$L(x(t)) = \frac{2}{s}e^{-s}$$

$$Y(s) = X(s)\,H(s)$$

Entonces:

$$Y(s) = \frac{2}{s(s+2)^2(s+1)}e^{-s}$$

Esta expresión podemos descomponerla en fracciones parciales (sin considerar retardo):

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2} + \frac{D}{s+1}$$

Aplicando el método del cálculo de residuos:

$$Y(s) = \frac{1/2}{s} + \frac{3/2}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2} - \frac{2}{s+1}$$

Calculamos transformada inversa:

$$y(t) = (\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-2t} + te^{-2t} - 2e^{-t})u(t)$$

Considerando el retardo la respuesta del sistema es:

$$y(t) = (\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-2(t-1)} + (t-1)e^{-2(t-1)} - 2e^{-(t-1)})u(t-1)$$

Ahora, para obtener el gráfico aproximado hay que considerar:

- El sistema es estable, y se puede aplicar el teorema del valor final.
- Las condiciones iniciales son nulas.
- El efecto del retardo en una unidad de tiempo.
- Los polos son reales, por lo que la respuesta del sistema no es oscilatoria.

Teorema del valor final:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s\,Y(s) = \frac{1}{2}$$

Como el sistema es causal y la entrada es un escalón desplazado hacia la derecha en una unidad, y(t) también está desplazada a la derecha en una unidad.

El gráfico queda:

