Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Tarea 14

Fecha de entrega: 12 de junio de 2022

---

1. Enuncie 4 propiedades de la transformada Z y demuestre matemáticamente la propiedad de la convolución.

   Propiedades de la transformada z

   - Linealidad:
   $$\mathcal{Z}\{a \cdot f[n] + b \cdot g[n]\} = a \cdot F(z) + b \cdot G(z)$$
   - Inversión:
   $$\mathcal{Z}\{f[-n]\} = F(z^{-1})$$
   - Desplazamiento:
   $$\mathcal{Z}\{f[n-m]\} = z^{-m}F(z)$$
   - Convolución:
   $$\mathcal{Z}\{f[n] *_l g[n]\} = F(z)G(z)$$
   - Diferenciación en frecuencia:
   $$\mathcal{Z}\{n \cdot f[n]\} = -z\frac{d}{dz}F(z)$$
   - Escalamiento:
   $$\mathcal{Z}\{a^n \cdot f[n]\} = F(a^{-1}z)$$

2. Considerando u como escalón, encuentre la transformada Z de:

$$f[n] = 3u[n] - 0.3^n u[-n-1] + \cos[3n]\, u[n]$$

Para resolver esto es necesario utilizar propiedades de la transformada Z

$$\mathcal{Z}\{f[n]\} = 3\mathcal{Z}\{u[n]\} - \mathcal{Z}\{0.3^n u[-n-1]\} + \mathcal{Z}\{\cos[3n]\, u[n]\}$$

Utilizando transformadas z conocidas[1]:

[1] Usted nunca debe perder su tabla de transformadas Z

$$\mathcal{Z}\{f[n]\} = 3\mathcal{Z}\{u\,[n]\} - \mathcal{Z}\left\{0.3^n u\,[-n-1]\right\} + \mathcal{Z}\left\{\cos\left[3n\right] u\,[n]\right\}$$

Reemplazando transformadas conocidas:

$$\mathcal{Z}\{f[n]\} = 3\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-0.3z^{-1}} + \frac{1-z^{-1}\cos\left(3\right)}{1-2z^{-1}\cos\left(3\right)+z^{-2}}$$

3. Enuncie el teorema del residuo

   El teorema del residuo indica que para una función $f(z)$ con N polos p_i de orden k_i cada uno, su transformada inversa $f[n]$ está dada por:

$$f[n] = \sum_{k=1}^{N} \text{Res}\left(z^{k_i-1}F(z), z_i\right)$$

   Donde:

$$\text{Res}\left(z^{k_i-1}F(z), z_i\right) = \lim_{z\to z_i}\left(\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(z^{n-1}F(z)(z-z_i)^k)\right)$$

4. Calcule la transformada Z inversa (se sugiere usar residuo) de la función:

$$F(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

   Para comenzar reconocemos que:

   - El sistema tiene solo un polo Z=1
   - El orden del polo es k = 2

   Reemplazando en el teorema tendemos que:

$$f[n] = \lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{(2-1)!}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}(z^{n-1}\frac{z}{(z-1)^2}(z-1)^2)\right)$$

   Simplificando la expresión tendremos:

$$f[n] = \lim_{z\to 1}\left(\frac{d}{dz}(z^{n-1}z)\right)$$

   Usando propiedades de las potencias y derivando:

$$f[n] = \lim_{z \to 1} \left(n \cdot z^{n-1} \right)$$

Calculando el límite:

$$f[n] = n \cdot 1^{n-1}$$

Finalmente, obtenemos:

$$\boxed{f[n] = n}$$

5. Considere un sistema descrito por la ecuación en diferencias:

$$y[n] = b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + x[n]$$

Suponga que la salida de un sistema pasa por un filtro de función de transferencia $H(z) = (1 - z^{-1})^2$. Determine la salida del filtro $g[n]$ en términos de x.

Para resolver esto debemos **escoger** en que dominio será más fácil trabajar. **Se ha optado** por trabajar en el dominio n ya que **es más fácil** calcular la transformada inversa de la función de transferencia del filtro que de la multiplicación con la salida.

Comenzamos expandiendo $H(z)$:

$$H(z) = 1 - 2z^{-1} + z^{-2}$$

Usando propiedad del desplazamiento:

$$\mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$$

Ahora, sabemos que la salida del filtro $g[n]$ está dada por:

$$g[n] = f[n] * h[n]$$

Reemplazando f y h en la convolución:

$$g[n] = y[n] * (\delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2])$$

Aplicando distributividad en la convolución:

$$g[n] = y[n] * \delta[n] - 2y[n] * \delta[n-1] + y[n] * \delta[n-2])$$

Aplicando propiedad del cedazo y desplazamiento en la convolución:

$$g[n] = y[n] - 2y[n-1] + y[n-2]$$

Dado que nos piden expresar g en términos de x, sustituyo $y[n] = b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + x[n]$, de lo que se obtiene:

$$g[n] = b_0+b_1 n+b_2 n^2+x[n]-2(b_0+b_1(n-1)+b_2(n-1)^2+x[n-1])+b_0+b_1(n-2)+b_2(n-2)^2+x[n-2]$$

6. Determine si el sistema descrito por la siguiente función de transferencia es estable. Justifique:

$$F(Z) = \frac{3}{z^2 - 18z + 80}$$

Revisaremos la estabilidad analizando la posición de los polos, **un sistema discreto estable continene en su ROC al círculo unitario, es decir, no tiene polos fuera del círculo unitario**. Los polos del sistema del enunciado son:

$$z^2 - 18z + 80 = 0 \qquad z_1 = 8 \quad z_2 = 10$$

Observemos que ambos polos están fuera del círculo unitario, por lo que el sistema es inestable.