Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

# Ayudantía Extra I2

22 de Septiembre 2022

Nicolás Seguel Ardiles - neseguel@uc.cl

---

# Resumen

## Serie de Fourier

La serie de Fourier es la expresión de una función periódica como una suma infinita de sinusoides. Esta se puede escribir en forma trigonométrica o en forma compleja.

- Forma trigonométrica:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi}{T} nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi}{T} nx$$

  Donde:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \text{ dx} \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(n \frac{2\pi}{T} x) \text{ dx} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(n \frac{2\pi}{T} x) \text{ dx}$$

- Forma compleja:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{-i2\pi \frac{nx}{T}}$$

  Donde:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i2\pi \frac{nx}{T}} dx$$

## Transformada de Fourier

La transformada de Fourier es una forma de la serie de Fourier que proyecta una función no necesariamente periódica (o bien, de período infinito) que entrega las componentes de frecuencia (no necesariamente discretas) de una señal. Su expresión matemática es:

$$\boxed{\mathbf{F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi ux}\ dx}}$$

**Nota: esta es probablemente la fórmula más linda y poderosa que va a aprender en el curso**

## Propiedades de la transformada de Fourier

A continuación, se considerará que $F(u)$ es la transformada de Fourier de $f(x)$:

1. Dualidad:

$$\mathcal{F}\{F(u)\} = f(-x)$$

2. Linealidad:

$$\mathcal{F}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha F(u) + \beta G(u)$$

3. Escalamiento:

$$\mathcal{F}\{f(\alpha x)\} = \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{u}{\alpha}\right)$$

4. Desplazamiento:

$$\mathcal{F}\{f(x-a)\} = e^{-i2\pi au} F(u)$$

5. Convolución:

$$\mathcal{F}\{f(x) * g(x)\} = F(u)G(u)$$

6. Potencia:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g^*(x)\ \mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) G^*(u)\ \mathrm{dx}$$

7. Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, \mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 \, \mathrm{dx}$$

8. Autocorrelación:

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(\epsilon) f(\epsilon + x) \, \mathrm{d}\epsilon\right\} = |F(u)|^2$$

9. Derivada:

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = i2\pi u F(u)$$

# Ejercicios

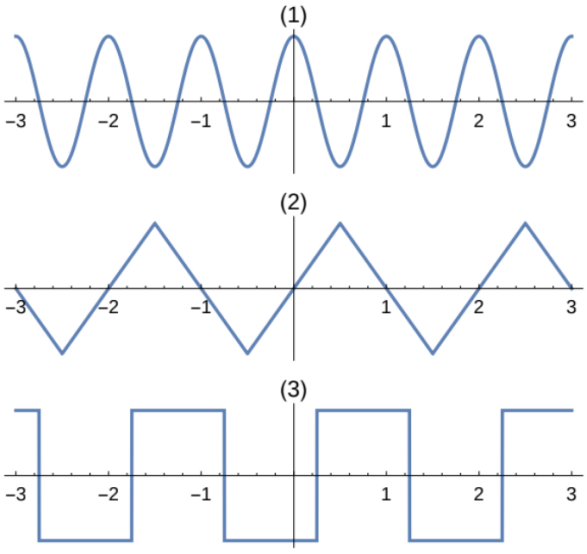
1. Encuentre la serie de Fourier de las siguientes funciones trigonométricas:

   - $f(x) = \cos(2\pi x) + \sin(4\pi x)$
   - $f(x) = (1 + \sin(2\pi x)) \cos(10\pi x)$

2. Encuentre una expresión en serie de Fourier para las siguientes funciones y determine la frecuencia máxima de cada una:

   - $f(x) = 1 + e^{ix}$
   - $f(x) = \cos^2(2\pi x) \cos(6\pi x)$

3. En la siguiente figura se muestran diferentes señales periódicas. Determine los coeficientes de la serie de Fourier de cada uno.



4. Demuestre que la transformada de Fourier de un tren de impulsos de período 1 es otro tren de impulsos de período 1.

5. Demuestre la propiedad del escalamiento de la transformada de Fourier.

   Aplicamos la transformada de Fourier a una función f escalada:

   $$f(ax) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-i2\pi ux}dx$$

   Luego aplicamos el cambio de variable $t = ax$ y $dt = adx$.

   $$\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi \frac{u}{a}}dt$$

   Observamos que dependiendo del valor de $a$, lo limites de integración cambian. Si $a$ es positivo, lo limites se mantiene iguales. Si $a$ es negativo, lo limites de integración se invierten.

   $a < 0$

   $$\frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty} f(t)e^{-i2\pi \frac{u}{a}}dt = -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi \frac{u}{a}}dt$$

   $a > 0$

   $$\frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty} f(t)e^{-i2\pi \frac{u}{a}}dt$$

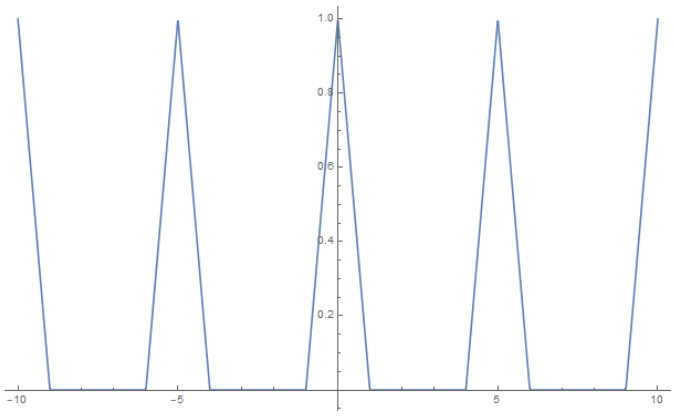
   Se observa que para cualquier valor de $a$, $\frac{1}{a}$, siempre es positivo. Por lo que equivalente a $\frac{1}{|a|}$. Por lo que desarrollando la transformada de Fourier queda:

   $$\frac{1}{|a|}F(\frac{u}{a})$$

6. Utilizando propiedades de la transformada de Fourier, determine:

   - $\sqcap(x)sgn(x)$
   - $\sqcap(x+a) + \sqcap(x-a)$

7. Considere la señal *trencito de triángulos* definida como:




*a*) Escriba la señal en términos de funciones vistas en el curso.
Vemos que la señal *trencito de triángulos* son multiples triángulos repetidos en el tiempo, por lo que lo podemos escribir de la siguiente forma:

$$f(x) = \wedge(x) * \text{lll}(\frac{x}{5})$$

*b*) Encuentre una expresión en serie de Fourier para la señal.
Utilizamos la ecuación para determinar los coeficientes de Fourier de la señal. Observamos que la señal tiene simetría par, por lo que sus coeficientes $b_n$ son 0. Calculamos los coeficientes $a_n$:

$$a_n = \frac{2}{5}(\int_{-1}^{4} \wedge(x)\cos(\frac{2\pi nx}{5})dx$$

$$a_n = \frac{2}{5}(\int_{-1}^{0}(1+x)\cos(\frac{2\pi nx}{5})dx + \int_{0}^{1}(1-x)\cos(\frac{2\pi nx}{5})dx)$$

Resolvemos la integral por integración por partes y obtenemos:

$$a_n = 5\frac{\sin(\frac{2\pi nx}{5})}{\frac{2\pi nx}{5}} = 5 \cdot sinc^2(n)$$

*trencito de triágulos*

*c*) Encuentre la transformada de Fourier de la señal *trencito de triángulos*
Podemos determinar la transformada de Fourier a partir de pares conocidos y propiedad de convolución.

$$\mathcal{F}\left\{\wedge(x) * \text{lll}(\frac{x}{5})\right\} = sinc^2(x)5\text{lll}(5x)$$

*d*) Establezca una relación entre la serie y la transformada de Fourier.

Podemos observar que la transformada Fourier de la función, solo toma valores para ciertas frecuencias, ya que esta multiplicada por un Shah. Por otro lado, los coeficientes de la serie de Fourier, también corresponden a un $sinc^2$ discreto, por lo que en este caso, son identicos.
Para un caso general, los coeficientes de la serie de Fourier es la trasformada de Fourier discretizada.

*e*) ¿Que puede decir de la transformada de Fourier de una señal periódica?

Como se mencionó en la parte anterior, cuando una señal es periódica, su transformada va a discreta.

*f*) Demuestre que la transformada de Fourier de una señal periódica es una señal discreta.

Esto se debe a que la periodicidad de una función en el tiempo se puede expresar como la convolución con un Shah, y que al sacar la trasformada se conviente en una multiplicación con un Shah, por que queda discreto.

8. Defina los conceptos ancho de banda y soporte compacto en el tiempo. Demuestre que una función acotada en el tiempo no puede tener ancho de banda limitado.

Una función tiene ancho de banda limitado cuando su transformada de Fourier está acotada entre ciertos valores de valores de frecuencia. Asimismo, el ancho de banda ilimitado, es cuando la trasformada tiene valores hasta el infinito.
El soporte compacto es el análogo del ancho de banda para el tiempo. Cuando una función tiene soporte compacto, significa que a partir de cierto valor par el tiempo la señal vale 0.
Podemos expresar una función con soporte compacto como la función multiplicada por un rect correctamente escalado, ya que a partir de cierto valor todo vale, el rect no modifica la señal original.

$$f(x) = f(x) \sqcap (\frac{x}{a})$$

Por lo que al sacar la trasformada de Fourier ocurre esto:

$$F(u) = F(u) * a \cdot sinc(ax)$$

Una convuloción con un sinc toma valores para todas frecuecias en el eje, por que no puede tener ancho de banda limitado.