Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Tarea 13

Fecha de entrega: 5 de junio de 2022

---

1. Investigue sobre el algoritmo FFT y responda:

   - ¿Cual es el propósito de este algoritmo?

     La *Fast Fourier Transform* es un algoritmo desarrollado para procesamiento computacional de señales que tiene como propósito obtener la DFT de una forma más rápida y eficiente de lo que se obtendría utilizando la definición de DFT directamente.

   - ¿Como funciona?

     Existen diferentes implementaciones de la FFT. Una de ellas consiste en separar la secuencia $\tilde{x}[n]$ de largo N en dos, donde N es un entero potencia de 2, es decir $N = 2^{\nu}$. La primera mitad corresponde a aquellos puntos donde n es par y la segunda donde n es impar. Considerando la definición de DFT:

     $$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{-i2\pi k\frac{n}{N}}$$

     Si ahora dividimos $\tilde{x}[n]$ en la suma de las transformadas para n par y para n impar:

     $$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N}\left(\sum_{n=\text{par}}\tilde{x}[n]e^{-i2\pi k\frac{n}{N}} + \sum_{n=\text{impar}}\tilde{x}[n]e^{-i2\pi k\frac{n}{N}}\right)$$

     A continuación, se sustituye $n = 2r$ para los n pares y $n = 2r+1$ para los n impares, obteniendo:

     $$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N}\left(\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1}\tilde{x}[2r]e^{-i4\pi k\frac{r}{N}} + e^{-i2\pi\frac{k}{N}}\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1}\tilde{x}[2r+1]e^{-i4\pi k\frac{r}{N}}\right)$$

     Es fácil observar que para el cálculo de una DFT de un vector cuyo periodo sea de largo N a través del método directo son necesarias N^2 multiplicaciones complejas

y $(N1)^2$ sumas complejas. Al subdividir en 2 el vector de entrada, para cada DFT de $\frac{N}{2}$ muestras se deben realizar $\left(\frac{N}{2}\right)^2$ multiplicaciones complejas e igual cantidad de sumas complejas. Son necesarias además N multiplicaciones complejas, por último, N sumas complejas para considerar índices pares e impares. Por lo tanto, el cálculo completo requiere a lo más $N + \frac{N^2}{2}$ sumas complejas y multiplicaciones complejas.

Si la cantidad N/2 es par, es posible aplicar el mismo procedimiento, de tal forma que se aplique ahora la DFT a un conjunto de cuatro vectores de N/4.

Producto de esta nueva descomposición el factor $\left(\frac{N}{2}\right)^2$ se reemplaza por $\frac{N}{2} + 2\left(\frac{N}{4}\right)^2$, luego el nuevo número, tanto de sumas complejas como de multiplicaciones complejas a realizar, es $2N + 4\left(\frac{N}{4}\right)^2$. Si se cumple que $N = 2^\nu$ el mismo procedimiento se puede repetir $\nu = \log_2 N$ veces. Descomponiendo ν veces el vector de entrada, es posible realizar la DFT en $N \log_2 N$ sumas complejas e igual número de multiplicaciones complejas

- ¿Cuanto más rápida es que la DFT para una secuencia de 1024 muestras?

  Una secuencia de largo N = 210 = 1024. Por el método directo tendremos que realizar $N^2 = 2^{20} = 1048576$ sumas y multiplicaciones para obtener la DFT, en cambio, sólo bastan $N \log_2 N = 10240$ si se emplea la FFT

2. Investigue y enuncie la transformada Z

   Se define la transformada Z como una transformación de funciones de variable n discreta a funciones de variable z continua:

$$\mathcal{Z}\{f[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] z^{-n}$$

   Donde $z = e^s$ donde s es la variable de Laplace $s = \sigma + i2\pi u$

3. Explique la relación entre la transformada z y la transformada de Laplace de tiempo discreto.

   Es posible definir una transformada de Laplace de tiempo discreto $DTLT$ de la forma:

$$DLFT\{f[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-sn}$$

   Dada la definición de la variable z, podemos hacer el cambio de variable $z = e^s$ y se

obtiene la transformada z:

$$\mathcal{Z}\{f[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n}$$

4. Describa que es la ROC de una transformada Z

   La ROC de una transformada z consiste en el rango de valores que puede tomar la variable z (dominio). Este en general está determinado por los valores que puede tomar z para que la sumatoria converja.

5. Determine la transformada Z de la función (considerando u escalon):

$$f[n] = u[n]$$

   Para resolver esto, aplicamos la definición de transformada Z:

$$\mathcal{Z}\{u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]z^{-n}$$

   Aplicando que escalón vale cero desde menos infinito a cero y luego de eso vale 1, al sumar los negativos estamos sumando cero, por lo que la sumatoria cambia a:

$$\mathcal{Z}\{u[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

   Observemos que si $|z^{-1}| < 1$ la suma corresponde a una serie geométrica, por lo que converge. Entonces:

$$\mathcal{Z}\{u[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad \text{Si}|z| > 1(\text{ROC})$$

6. Determine la transformada Z de la función (considerando u escalon):

$$f[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

   Para resolver esto, nuevamente reemplazamos en la fórmula:

$$\mathcal{Z}\{f[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Utilizando la multiplicación por escalón:

$$\mathcal{Z}\{f[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Re escribiendo:

$$\mathcal{Z}\{f[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^{-1}}{2}\right)^n$$

Haciendo el mismo análisis que en la pregunta 5, establecemos que si $|z^{-1}/2| < 1$ la serie geométrica que se forma converge, es decir, se requiere que $|z^{-1}| < 2$ para que la suma sea convergente. Entonces:

$$\mathcal{Z}\{f[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^{-1}}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{z^{-1}}{2}} \quad \text{Si} |z| > \frac{1}{2} (\text{ROC})$$