Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 Señales y Sistemas 2–2010 — Vicente Parot

Documento #6

Interrogación 1

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar libros y apuntes de clases.
- Sólo podrá solicitar re-corrección de aquellos problemas escritos con lápiz indeleble.
- Escriba un problema en cada hoja. Debe colocar su nombre en todas las hojas. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. [6 ptos] **Linealidad e Invariancia.** Se estudia un sistema para describir el funcionamiento de una bicicleta, donde la entrada es el torque aplicado por los pies del ciclista en el eje de los pedales y la salida es el torque que el suelo aplica en el eje de la rueda. En primera instancia, el sistema está simpificado lo más posible.

   a) [2 ptos] Determine una expresión analítica que exprese la salida $g(t)$ en función de la entrada $f(t)$ y determine si el sistema es lineal e invariante.

   En un intento por caracterizar mejor el sistema, se incluyen otros aspectos en el modelo. Se consideran independientemente los siguientes casos.

   – La bicicleta tiene cambios, y cuando $t = t_0$ se pasa de uno a otro.
   – El ciclista llega al punto más alto del camino cuando $t = t_0$, y al empezar a bajar la rueda gira libremente más rápido que la cadena de transmisión.
   – La bicicleta lleva encendido un motor tipo "mosquito" que aporta un torque constante además del que hace el ciclista.

   Al considerar independientemente alguna de estas modificaciones al sistema original, Encuentre ejemplos de

   b) [2 ptos] Un sistema no-lineal.
   c) [2 ptos] Un sistema variante en el tiempo.

   Demuestre sus respuestas.

   Resultado:

   a) El sistema de la bicicleta se puede describir con $\mathcal{S}\{f(t)\} = g(t) = Kf(t)$.
   Homogeneidad: $\mathcal{S}\{\alpha f(t)\} = K\alpha f(t) = \alpha\mathcal{S}\{f(t)\}$, por lo tanto el sistema es homogéneo.
   Superposición: Si $g_1(t) = Kf_1(t)$ y $g_2(t) = Kf_2(t)$, entonces $\mathcal{S}\{f_1(t) + f_2(t)\} = K(f_1(t) + f_2(t)) = Kf_1(t) + Kf_2(t) = g_1(t) + g_2(t)$, y el sistema también cumple superposición, por lo tanto es lineal.
   Invariancia: La salida del sistema ante entrada $f(t - \Delta T)$ es $Kf(t - \Delta T)$ que es igual a $g(t - \Delta T)$ por lo que el sistema también es invariante.

b) En el caso del "mosquito", se puede modelar el sistema como $\mathcal{S}_m\{f(t)\} = g(t) = Kf(t) + m$. En este caso, el sistema no es homogéneo porque $\mathcal{S}_m\{0f(t)\} = m \neq 0\mathcal{S}_m\{f(t)\}$. Este sistema no es lineal.

c) Si el cambio de la bicicleta se incluye en el sistema, podemos escribirlo como $\mathcal{S}_c\{f(t)\} = g(t) = [K_1 + K_2\sqcap(t - t_0)]f(t)$. Con una entrada $f(t - \Delta T)$, la salida es

$$g(t) = [K_1 + K_2\sqcap(t - t_0)]\, f(t - \Delta T)$$

pero ésta es distinta de

$$g(t - \Delta T) = [K_1 + K_2\sqcap(t - (t_0 + \Delta T))]\, f(t - \Delta T)$$

por lo que el sistema es variante en el tiempo.

2. [4 ptos] **Conjugado.** Considere un sistema donde la salida es la entrada conjugada. ¿Es este un sistema LIT (lineal e invariante en el tiempo)? Demuestre su respuesta.

   Resultado: Este no es un sistema LIT, prueba de ello es que $\mathcal{S}\{1\} = 1$ pero eligiendo $\alpha = i$, $\mathcal{S}\{\alpha\} = \mathcal{S}\{i\} = -i$ y por otro lado $\alpha\mathcal{S}\{1\} = i$ y por lo tanto el sistema no es homogéneo.

3. [6 ptos] **Simetrías.** Sea $f(x)$ una función compleja de argumento real con $f(x) \longrightarrow F(u)$. Encuentre las siguientes transformadas:

   a) [2 ptos] $\mathcal{F}\{f^*(x)\}$

   b) [1 ptos] $\mathcal{F}\{f(x) + f^*(x)\}$

   c) [1 ptos] $\mathcal{F}\{f(x) - f^*(x)\}$

   d) [2 ptos] A partir de las transformadas anteriores encuentre las fórmulas para descomponer una función cualquiera como la suma de una función hermitiana y una función antihermitiana.

   Resultado:

   a) Sea $G(u) = \mathcal{F}\{f^*(x)\}$. Usando la definición,

$$\begin{aligned} G(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)e^{-i2\pi ux}dx \\ G(u) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)e^{-i2\pi ux}dx\right)^{**} \\ G(u) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i2\pi ux}dx\right)^{*} \\ G(u) &= (F(-u))^* \\ f^*(x) &\longrightarrow F^*(-u) \end{aligned}$$

   b) Usando el resultado anterior, la respuesta es $\mathcal{F}\{f(x)+f^*(x)\} = \mathcal{F}\{f(x)\}+\mathcal{F}\{f^*(x)\} = F(u) + F^*(-u)$. Observe que en el dominio del espacio esta función es real, ya que se cancelan sus partes imaginarias. de hecho, $f(x) + f^*(x) = 2\mathrm{Re}\{f(x)\}$. Al ser real, se sabe que su transformada es hermitiana.

c) Análogamente, $\mathcal{F}\{f(x)-f^*(x)\} = \mathcal{F}\{f(x)\}-\mathcal{F}\{f^*(x)\} = F(u)-F^*(-u)$. También, en el dominio x la señal es imaginaria y en frecuencia es antihermitiana.

d) Con los resultados anteriores se puede ver que $F(u)$ puede escribirse como

$$F(u) = \frac{F(u) + F^*(-u)}{2} + \frac{F(u) - F^*(-u)}{2}$$

Los dos términos de esta suma sirven como fórmulas para descomponer una señal en parte hermitiana y antihermitiana respectivamente. Nótese que $F(u)$ puede no tener ninguna simetría. Incluso, la función F puede ser cualquiera y u puede ser reemplazada por cualquier otra letra, y esta descomposición sigue siendo válida.

4. [4 ptos] **Impulso.** Calcule el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\delta(x^2 - ax)dx \quad (a \in \mathbb{C})$$

Resultado: En primer lugar, $x^2 - ax$ vale cero cuando $x = 0, x = a$ y es derivable en esos lugares. Luego el impulso de una función, $\delta(f(x)) = \sum_n \delta(x - x_n)/|f'(x_n)|$ permite resolver:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x\delta(x^2 - ax)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\frac{\delta(x)}{|-a|} + \frac{\delta(x-a)}{|a|}\right)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 0\frac{\delta(x)}{|-a|} + a\frac{\delta(x-a)}{|a|}dx \\ &= \frac{a}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)dx = \frac{a}{|a|} = \angle a\end{aligned}$$

5. [6 ptos] **Sistema y Serie.** Un sistema lineal e invariante tiene respuesta al impulso $h(x) = \sqcap(x) - \sqcap(x-2)$. ¿Cuál es la salida del sistema si la entrada es una función periódica con coeficientes de Fourier $C_k = (k^2+1)^{-1}$ y frecuencia fundamental $\omega_0 = \pi$?

Resultado: Sea la entrada $f(x) \longrightarrow F(u)$, la salida $g(x) \longrightarrow G(u)$ y $H(u) = \mathcal{F}\{h(x)\}$ la función de transferencia del sistema. Si la entrada tiene frecuencia fundamental $\omega_0 = \pi$, su período es $X_0 = 2$, entonces el término de la serie con frecuencia no nula más baja es el coseno (o seno o exponencial) $\cos(1\omega_0 x) = \cos(\pi x)$ y el resto de los términos tienen frecuencias múltiplo de éste.

Usando el dominio de frecuencia, $g(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(u)H(u)\}$. La función de transferencia del sistema se puede calcular a partir de un par conocido de Fourier:

$$h(x) = \sqcap(x) - \sqcap(x-2) = \sqcap\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}\sqcap(x) &\longrightarrow \operatorname{sinc}(u) \\ \sqcap\left(\frac{x}{2}\right) &\longrightarrow 2\operatorname{sinc}(2u) \\ \sqcap\left(\frac{x-1}{2}\right) &\longrightarrow 2e^{-i2\pi u}\operatorname{sinc}(2u) = H(u)\end{aligned}$$

La función $\operatorname{sinc}(2u)$ tiene cruces por cero para $u = n/2$ con $n \in \mathbb{Z} \neq 0$. Al calcular $F(u) = \mathcal{F}\{f(t)\}$, se ve que cada término de la serie produce un par de impulsos y por linealidad la transformada es la suma de éstos. Los impulsos del primer término $\cos(\pi x)$ están ubicados en $u = \pm 1/2$, las frecuencias de los otros armónicos son múltiplo de la primera. La única excepción es el término $k = 0$ con $C_0 = (0^2 + 1)^{-1} = 1$ que no es oscilatorio y su transformada es un impulso en el origen. Al multiplicar $F(u)H(u)$ todos los impulsos excepto el del origen se multiplican por cero, resultando $H(u)F(u) = 2e^{-i2\pi 0}\operatorname{sinc}(0)\delta(x) = 2\delta(u)$ y entonces la salida del sistema es $g(x) = 2$.

También se puede resolver en el dominio del tiempo, se puede ver que al convolucionar la función periódica con un rect del mismo ancho que su período, todas las componentes de frecuencia fundamental y sus múltiplos van a integrar cero y sólo quedará su componente continua, que se multiplica por el área bajo la curva de la respuesta al impulso. En otras palabras, la integral en el largo de un período es la componente continua (coeficiente C_0) de la señal multiplicada por el largo del período, independiente de dónde se sitúe el intervalo de integración.

6. [4 ptos] **Fourier.** Para el par de Fourier $f(x) \longrightarrow F(u)$ se propone lo siguiente:

$$f(x) + xf'(x) \longrightarrow -uF'(u)$$

Muestre que la relación es correcta o indique alguna modificación para corregirla.

Resultado: Usando la definición de transformada de Fourier,

$$\begin{aligned}
F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi ux}dx \quad /\frac{d}{du} \\
\frac{d}{du}F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d}{du}e^{-i2\pi ux}dx \\
F'(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) - i2\pi x e^{-i2\pi ux}dx \\
F'(u) &= \mathcal{F}\{-i2\pi x f(x)\} \quad /\mathcal{F}^{-1} \\
\mathcal{F}^{-1}\{F'(u)\} &= \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{-i2\pi x f(x)\}\} \\
\int_{-\infty}^{\infty} F'(u)e^{i2\pi ux}du &= -i2\pi x f(x) \quad /\frac{d}{dx} \\
\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} F'(u)e^{i2\pi ux}du &= \frac{d}{dx}(-i2\pi x f(x)) \\
\int_{-\infty}^{\infty} F'(u)\frac{d}{dx}e^{i2\pi ux}du &= -i2\pi(f(x) + xf'(x)) \\
\int_{-\infty}^{\infty} F'(u)i2\pi u e^{i2\pi ux}du &= -i2\pi(f(x) + xf'(x)) \quad /\mathcal{F} \\
i2\pi u F'(u) &= \mathcal{F}\{-i2\pi f(x) - i2\pi x f'(x)\} \\
-uF'(u) &= \mathcal{F}\{f(x) + xf'(x)\}
\end{aligned}$$

La relación propuesta es correcta.