IEE2103 - SEÑALES Y SISTEMAS

Interrogación 1

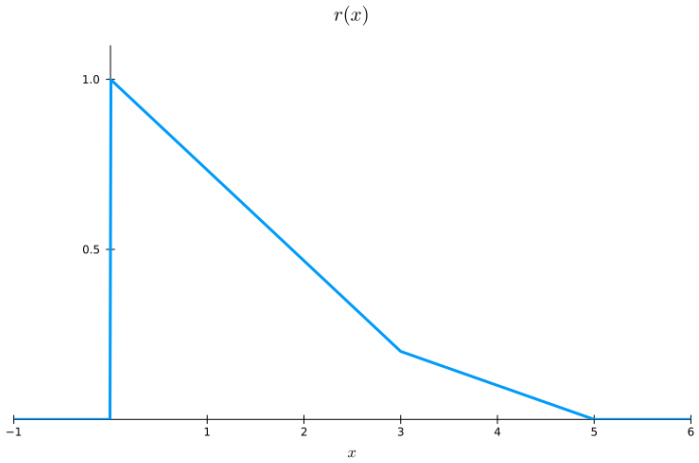
Prof. Rodrigo F. Cádiz

2do. semestre 2022
Tiempo: 1 hr. 20 min.
Puntos: 48
Fecha: 29/08/2022

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo dos carillas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre, número de interrogación y número de pregunta en todas las hojas que ocupe. Las hojas sin esta información no serán corregidas.

---

1. (12 pts.) **Resbalín**. Considere la función resbalín $r(x)$ especificada por el siguiente gráfico



(a) (3 pts.) Exprese esta función resbalín en términos de las funciones útiles vistas en clase.

(b) (9 pts.) Grafique las siguientes transformaciones, indicando todos los puntos relevantes:

i. (3 pts.) $r(3x+6)$

ii. (3 pts.) $r(2-x)\,\mathrm{sgn}(x)$

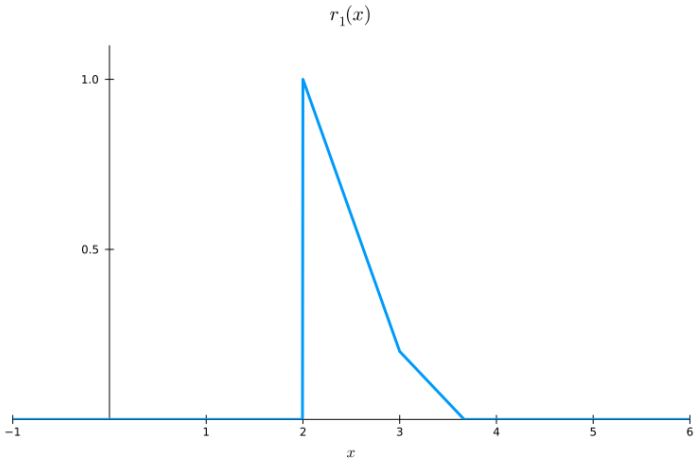
iii. (3 pts.) $\sqrt{|e^{\frac{4i\pi x}{5}}|}r(2x)+i2x$

Solución

(a) Existen varias formas de expresar esta función, quizás la más fácil sea

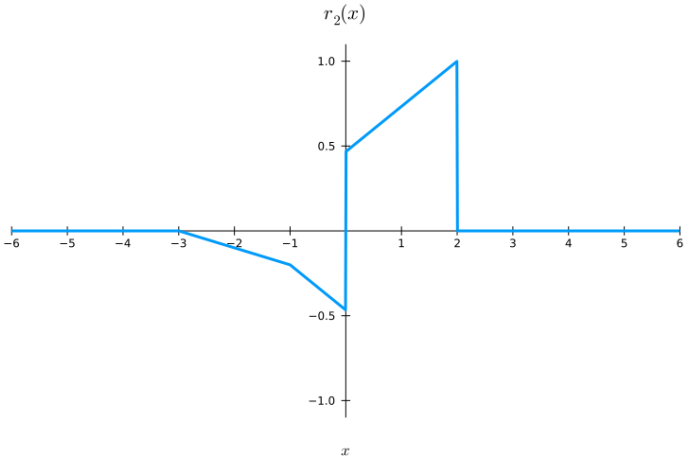
$$r(x)=\frac{1}{2}\left(\wedge(\frac{x}{5})+\wedge(\frac{x}{3})\right)\sqcap(\frac{x-2.5}{5}) \rightarrow \textbf{3 pts.}$$

Por favor mire la página siguiente ...



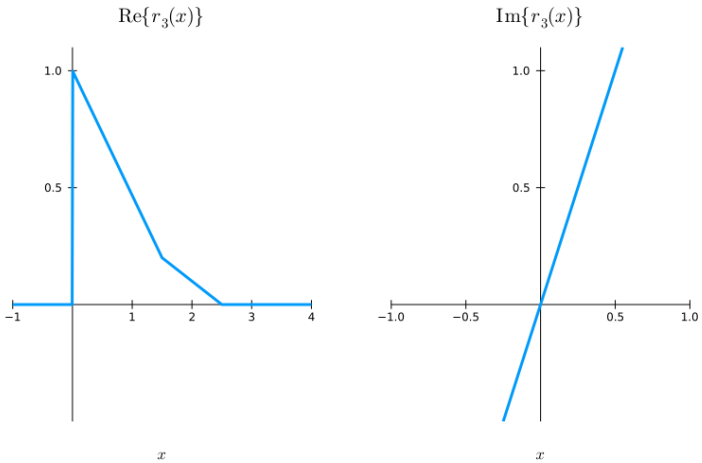
(b)

→ **3 pts.**



(c)

→ **3 pts.**



(d)

→ **3 pts.**

2. (12 pts.) **Integrador**. Considere el sistema integrador $f \to g$ determinado por la siguiente ecuación

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\alpha x} f(\xi) d\xi, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

(a) (2 pts.) Conceptualice el sistema como la interconexión en serie de dos subsistemas. (NOTA: los sistemas triviales del tipo multiplicar por uno o multiplicar por cero no se pueden utilizar).

(b) (2 pts.) Determine si el sistema es lineal.

(c) (2 pts.) Determine si el sistema es invariante.

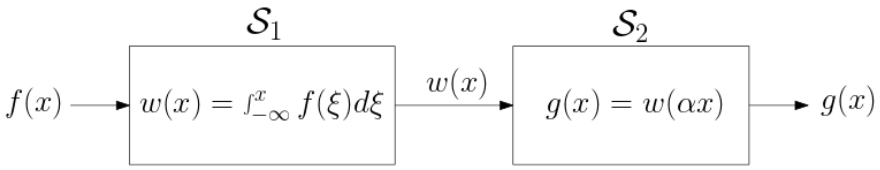
(d) (2 pts.) Determine si el sistema es estable.

(e) (2 pts.) Determine si el sistema tiene memoria.

(f) (2 pts.) Determine si el sistema es causal.

Solución

(a) Este sistema puede ser conceptualizado como un sistema integrador $\mathcal{S}_1$ → **1 pt.** conectado con un sistema $\mathcal{S}_2$ que comprime la variable independiente en un factor α → **1 pt.** , tal como lo muestra la figura



(b) El sistema $\mathcal{S}_1$ es lineal (la integración es una operación lineal) y el sistema $\mathcal{S}_2$ también lo es, por lo tanto el sistema completo es lineal → **2 pts.**

(c) El sistema $\mathcal{S}_2$ es variante, porque

$$w(x - \xi) \to w(\alpha x - \xi) \neq g(x - \xi) = w(\alpha(x - \xi))$$

por lo tanto el sistema completo es variante → **2 pts.**

(d) El sistema completo es inestable, porque el sistema integrador $\mathcal{S}_1$ es inestable, porque puede producir salidas no acotadas a entradas acotadas → **2 pts.** Por ejemplo, si la entrada a un integrador es un escalón (una señal acotada), la salida es una rampa (una señal que no es acotada).

(e) Claramente el sistema completo tiene memoria porque ambos sistemas $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ tienen memoria: el primero necesita toda la historia pasada de la entrada y el segundo necesita valores distintos del valor actual de la variable independiente para calcular la salida → **2 pts.**

(f) El sistema $\mathcal{S}_2$ es no causal, porque la salida podría anticipar la entrada, por lo tanto el sistema completo es no causal → **2 pts.**

3. (12 pts.) **Autofunciones**. Una señal $f(t)$ es una autofunción de un sistema si es que se cumple

$$g(t) = \lambda f(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

donde g es la salida y f la entrada del sistema. Considere el sistema lineal e invariante $\mathcal{L}$.

(a) (8 pts.) Muestre que las señales exponenciales complejas son autofunciones del sistema $\mathcal{L}$.

(b) (4 pts.) Discuta que sucede con las sinusoides (seno o coseno), ¿son también autofunciones del sistema $\mathcal{L}$?

Solución

(a) Como el sistema $\mathcal{L}$ es invariante, tenemos que

$$e^{s(t-\tau)} \xrightarrow{\mathcal{L}} g(t-\tau) \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Aplicando la propiedad de las exponenciales, y considerando que como $\mathcal{L}$ es lineal es también homogéneo, observamos que

$$e^{s(t-\tau)} = e^{st}e^{-s\tau} \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{-s\tau}g(t) \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Combinando ambas ecuaciones, concluimos que

$$g(t-\tau) = e^{-s\tau}g(t) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Evaluando en $t = 0$

$$g(-\tau) = g(0)e^{-s\tau} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

y como el desfase es arbitrario, podemos hacer el cambio de variables $t = -\tau$. Además llamando λ a $g(0)$, obtenemos

$$g(t) = \lambda e^{st} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

lo que prueba que e^{st} es una autofunción del sistema $\mathcal{L}$.

(b) Para los efectos de la pauta consideramos el caso del coseno, ya que el caso del seno es muy similar. Sabemos que

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

es decir, un coseno es una combinación lineal de exponenciales complejas $\rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$ Como cada una de estas exponenciales complejas es una autofunción del sistema $\mathcal{L}$, solo en que caso en que ambas exponenciales sean multiplicadas por el mismo autovalor λ el coseno podría ser una autofunción del sistema $\mathcal{L}$ $\rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$

4. (12 pts.) **Derivadas**. Calcule las siguientes derivadas de señales

(a) (4 pts.) $\frac{d^4}{dx^4}\{\text{ramp}(x+T)\}, T \in \mathbb{R}$

(b) (4 pts.) $\frac{d}{dx}\{x\,\mathrm{sgn}(x)\}$

(c) (4 pts.) $\frac{d}{dx}\{(\sin x+\cos x)\sqcap(x+T)\}, T\in\mathbb{R}$

Solución

En primer lugar, observamos que dado que las expresiones solicitadas involucran derivadas del escalón, es necesario considerar estas operaciones en el sentido de las distribuciones.

(a) Vemos que la primera derivada de la rampa es el escalón → **1 pt.** y la primera derivada del escalón es el impulso → **1 pt.** Si el escalón está centrado en $-T$, entonces su derivada también lo está. Por lo tanto

$$\boxed{\frac{d^4}{dx^4}\{\mathrm{ramp}(x+T)\}=\delta''_{-T}} \rightarrow \textbf{2 pts.}$$

(b) Aplicando la regla del producto y considerando que $\mathrm{sgn}(x)=2\sqcap(x)-1$ → **1 pt.** :

$$\frac{d}{dx}\{x\,\mathrm{sgn}\}=x'\mathrm{sgn}(x)+x\,\mathrm{sgn}'(x)=\mathrm{sgn}(x)+x(2\sqcap(x)-1)'\rightarrow \textbf{1 pt.}$$
$$=\mathrm{sgn}(x)+x2\delta=\mathrm{sgn}(x)+x(0)\times 2\delta=\mathrm{sgn}(x)+0\times 2\delta\rightarrow \textbf{1 pt.}$$

por lo que

$$\boxed{\frac{d}{dx}\{x\,\mathrm{sgn}\}=\mathrm{sgn}(x)}\rightarrow \textbf{1 pt.}$$

(c) Aplicando la regla del producto:

$$\frac{d}{dx}\{(\sin x+\cos x)\sqcap(x+T)\}=(\sin x+\cos x)'\sqcap(x+T)+(\sin x+\cos x)\sqcap'(x+T)\rightarrow \textbf{1 pt.}$$
$$=(\cos x-\sin x)\sqcap(x+T)+(\sin x+\cos x)\delta_{-T}\rightarrow \textbf{1 pt.}$$
$$=(\cos x-\sin x)\sqcap(x+T)+\{\cos(-T)+\sin(-T)\}\delta_{-T}\rightarrow \textbf{1 pt.}$$

y considerando la paridad de las señales involucradas:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\{(\sin x+\cos x)\sqcap(x+T)\}=(\cos x-\sin x)\sqcap(x+T)+(\cos T-\sin T)\delta_{-T}}\rightarrow \textbf{1 pt.}$$

La pregunta 4 continúa en la página siguiente ...