Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento Ingeniería Eléctrica

IEE 2102 ANALISIS DE SEÑALES 2007-2

INTERROGACION Nº 3

1. A partir de pruebas experimentales se ha determinado que la dinámica de un sistema electrotérmico queda caracterizada por la siguiente ecuación diferencial:

$$T_1 T_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + (T_1 + T_2)\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K_p x(t - L)$$

En esta expresión $y(t)$ es la temperatura en ^oC, $x(t)$ es la potencia en *KWatt*, T_1 y T_2 son las constantes de tiempo, L es el retardo, K_p es la ganancia estática.

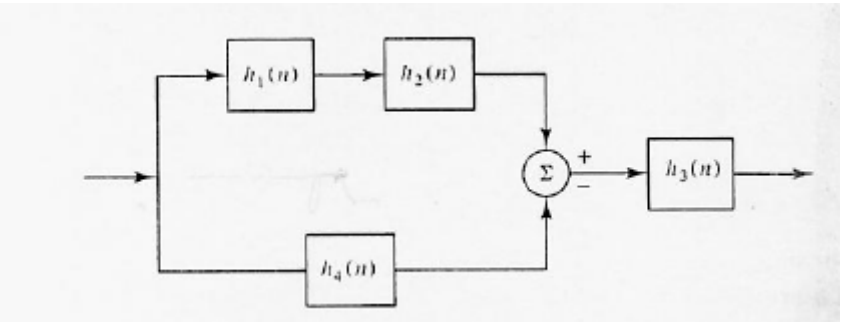
Los parámetros tienen los siguientes valores: $L = 2\ \text{min.}$, $T_1 = 6\ \text{min.}$, $T_2 = 4\ \text{min.}$, $K_p = 0{,}5\ ^oC / KWatt$.

1.1 Obtenga la función de transferencia del sistema electrotérmico.
1.2 Determine la respuesta del sistema para condición inicial $y(0) = 20\ ^oC$, $x(t) = 4\ KWatt$ para $0 \le t < 40\ \text{min.}$, $x(t) = 0$ para $t \ge 40\ \text{min.}$
1.3 Grafique la variación en el tiempo de $y(t)$.

2. Considere el sistema dinámico de la figura, en el cual

$$h_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \qquad h_2(n) = 2\delta(n-1)$$

$$h_4(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \qquad h_3(n) = u(n)$$



2.1 Obtenga la función respuesta al impulso del sistema.
2.2 Plantee la ecuación de diferencia entrada-salida, con $x(n)$ la entrada e $y(n)$ la salida.
2.3 Determine la respuesta en frecuencia $H(\Omega)$.

3. Sea $x_a(t)$ una señal de ancho de banda 3 *KHz* que se muestrea con un periodo $T = 40\ \mu seg.$; designe con $x(n)$ a la señal muestreada.

3.1 Suponiendo que el espectro de $x_a(t)$ es triangular, grafique el espectro de $x(n)$.

3.2 Qué recomienda para reducir el requerimiento de memoria del computador que procesa la señal? A qué proporción consigue reducir la memoria requerida, sin perder información? Grafique el espectro de la señal obtenida.

3.3 Estudie qué implicancias tiene sobre las respuestas 3.1 y 3.2 modificar el periodo de muestreo a $T = 100\ \mu seg.$

3.4 Repita 3.3 con $T = 200\ \mu seg.$

Observaciones

Tiempo: 2 horas.

En la interrogación está permitido utilizar material impreso y calculadora.

Las aclaraciones de enunciado deben solicitarse en voz alta y sólo en los primeros 15 minutos. Pasado este tiempo no se aceptan más preguntas. Si considera que en alguna pregunta falta información, realice una suposición razonable que no se contradiga con el enunciado y déjelo claramente expresado en su respuesta.

Responda las preguntas en hojas separadas. No olvide colocar su nombre en cada hoja de respuesta.

Las 3 preguntas tienen igual ponderación.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento Ingeniería Eléctrica

IEE 2102 ANALISIS DE SEÑALES 2007-2

PAUTA INTERROGACION Nº 3

1. A partir de pruebas experimentales se ha determinado que la dinámica de un sistema electrotérmico queda caracterizada por la siguiente ecuación diferencial:

$$T_1T_2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+(T_1+T_2)\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=K_p x(t-L)$$

En esta expresión $y(t)$ es la temperatura en *ºC*, $x(t)$ es la potencia en *KWatt*, T_1 y T_2 son las constantes de tiempo, L es el retardo, K_p es la ganancia estática.

Los parámetros tienen los siguientes valores: $L=2\ \text{min.}$, $T_1=6\ \text{min.}$, $T_2=4\ \text{min.}$, $K_p=0{,}5\,^{\circ}C/KWatt$.

1.1 Obtenga la función de transferencia del sistema electrotérmico.
1.2 Determine la respuesta del sistema para condición inicial $y(0)=20\,^{\circ}C$, $x(t)=4\ KWatt$ para $0\le t<40\ \text{min.}$, $x(t)=0$ para $t\ge 40\ \text{min.}$
1.3 Grafique la variación en el tiempo de $y(t)$.

SOLUCIÓN

1.1

Aplicando transformada de Laplace, considerando condiciones iniciales nulas, se tiene:

$$T_1T_2s^2Y(s)+(T_1+T_2)sY(s)+Y(s)=K_pe^{-Ls}X(s)$$

De donde la función de transferencia queda:

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{K_pe^{-Ls}}{T_1T_2s^2+(T_1+T_2)s+1}=\frac{K_pe^{-Ls}}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

Finalmente evaluando queda (constantes en segundos y ganancia estática en ºC / Watt se consideró correcto):

$$\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{0.5e^{-2s}}{(6s+1)(4s+1)}$$

1.2

Aplicando transformada de Laplace, considerando condición inicial no nula, se tiene:

$$T_1T_2s^2Y(s) - T_1T_2sy(0) + (T_1 + T_2)sY(s) - (T_1 + T_2)y(0) + Y(s) = K_p e^{-Ls} X(s)$$

La transformada de la función de entrada es:

$$X(s) = 4\left(\frac{1 - e^{-40s}}{s}\right)$$

De donde:

$$Y(s) = \frac{T_1T_2s^2 y(0) + (T_1 + T_2)y(0)s + K_p e^{-Ls}\left(4 - 4e^{-40s}\right)}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

Reescribiendo de manera conveniente queda:

$$Y(s) = \frac{T_1T_2 y(0)s + (T_1 + T_2)y(0)}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} + \frac{4K_p e^{-Ls}}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)} - \frac{4K_p e^{-(L+40)s}}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

Reemplazando los valores numéricos:

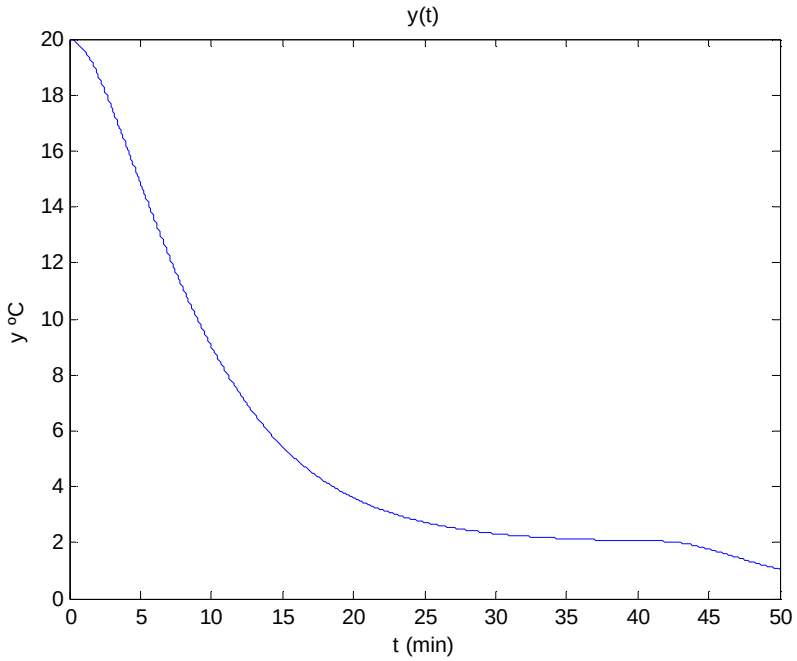
$$Y(s) = \frac{480s + 200}{(6s + 1)(4s + 1)} + \frac{2e^{-2s}}{s(6s + 1)(4s + 1)} - \frac{2e^{-42s}}{s(6s + 1)(4s + 1)}$$

Finalmente tomando transformada inversa (luego de expandir en fracciones parciales por cualquier método) queda:

$$y(t) = \left(60e^{-t/6} - 40e^{-t/4}\right)u(t) + 2\left(1 - 3e^{(-t/6+1/3)} + 2e^{(-t/4+1/2)}\right)u(t-2) - 2\left(1 - 3e^{(-t/6+7)} + 2e^{(-t/4+21/2)}\right)u(t-42)$$

1.3

El gráfico de la señal es:



Se ve claramente que el valor inicial es 20 (por enunciado) y que el decaimiento es exponencial según las constantes de tiempo obtenidas en el apartado anterior. De la expresión obtenida, se aprecia que el valor final debe ser 0.

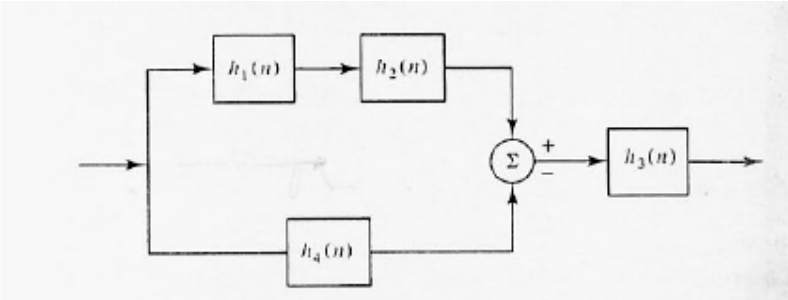
ASIGNACION DE PUNTAJE

1.1 2 puntos
1.2 2.5 puntos
1.3 1.5 puntos

2. Considere el sistema dinámico de la figura, en el cual

$$h_1(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \qquad h_2(n)=2\delta(n-1)$$

$$h_4(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \qquad h_3(n)=u(n)$$



2.1 Obtenga la función respuesta al impulso del sistema.
2.2 Plantee la ecuación de diferencia entrada-salida, con $x(n)$ la entrada e $y(n)$ la salida.
2.3 Determine la respuesta en frecuencia $H(\Omega)$.

SOLUCIÓN

2.1

Del diagrama de simulación, la función respuesta al impulso del sistema se calcula como:

$$h(n)=\left(h_1(n)*h_2(n)-h_4(n)\right)*h_3(n)$$

Desarrollando la primera convolución queda:

$$h(n)=\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)-\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)\right)*u(n)$$

Desarrollando las convoluciones queda:

$$h(n)=\left(4-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)u(n-1)-\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)u(n)$$

Que se puede reeescribir como:

$$h(n)=\left(4-4\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)u(n)-\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)u(n)$$

Con lo que finalmente la respuesta al impulso queda:

$$h(n)=\left(\frac{5}{2}-4\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)u(n)$$

2.2

Para obtener la ecuación en diferencias hay que formar la ecuación característica a partir de las 3 raíces que se aprecian en la respuesta al impulso:

$$\alpha_1=1$$
$$\alpha_2=\frac{1}{2}$$
$$\alpha_3=\frac{1}{3}$$

Luego la ecuación característica es:

$$(\alpha-1)\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\alpha-\frac{1}{3}\right)=\alpha^3-\frac{11}{6}\alpha^2+\alpha-\frac{1}{6}$$

Reescribiendo la ecuación en términos del retardo unidad queda:

$$1-\frac{11}{6}\alpha^{-1}+\alpha^{-2}-\frac{1}{6}\alpha^{-3}$$

Con lo que el lado derecho de la ecuación en diferencias es:

$$y(n)-\frac{11}{6}y(n-1)+y(n-2)-\frac{1}{6}y(n-3)$$

Para calcular el lado izquierdo, se deben obtener las condiciones iniciales a partir de la respuesta al impulso:

$$y(0) = -1$$
$$y(1) = \frac{2}{3}$$
$$y(2) = \frac{14}{9}$$
$$y(3) = \frac{109}{54}$$

Los coeficientes del lado izquierdo se obtienen resolviendo el sistema matricial asociado. Resultando:

$$b_0 = -1$$
$$b_1 = \frac{5}{2}$$
$$b_2 = -\frac{2}{3}$$
$$b_3 = 0$$

Finalmente la ecuación en diferencias queda:

$$y(n) - \frac{11}{6}y(n-1) + y(n-2) - \frac{1}{6}y(n-3) = -x(n) + \frac{5}{2}x(n-1) - \frac{2}{3}x(n-2)$$

2.3

La respuesta en frecuencia resulta de aplicar transformada de Fourier a la respuesta al impulso obtenida en 2.1

$$H(\Omega) = 5\pi\delta(\Omega) - \frac{4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$$

Cualquier factorización se consideró correcta.

ASIGNACION DE PUNTAJE

2.1 2 puntos
2.2 3 puntos
2.3 1 punto

3. Sea $x_a(t)$ una señal de ancho de banda 3 *KHz* que se muestrea con un periodo $T = 40\ \mu seg.$; designe con $x(n)$ a la señal muestreada.

3.1 Suponiendo que el espectro de $x_a(t)$ es triangular, grafique el espectro de $x(n)$.

3.2 Qué recomienda para reducir el requerimiento de memoria del computador que procesa la señal? A qué proporción consigue reducir la memoria requerida, sin perder información? Grafique el espectro de la señal obtenida.

3.3 Estudie qué implicancias tiene sobre las respuestas 3.1 y 3.2 modificar el periodo de muestreo a $T = 100\ \mu seg.$

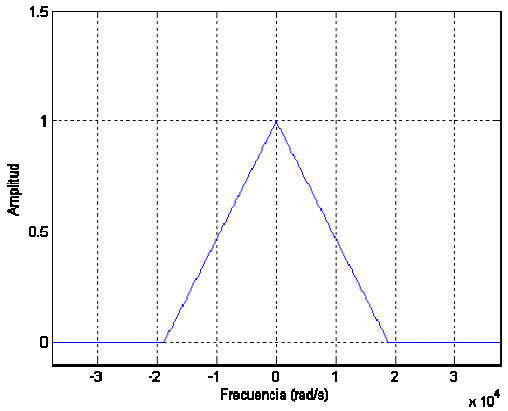
3.4 Repita 3.3 con $T = 200\ \mu seg.$

SOLUCIÓN

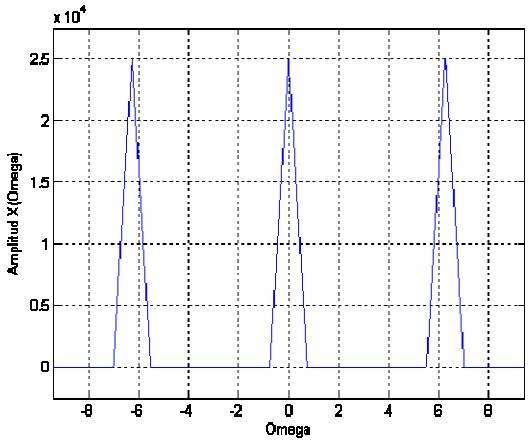
3.1

Podemos encontrar el espectro de $x(n)$ a partir del espectro de $x_a(t)$ utilizando la relación $X(\Omega) = X_s(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X_a(\omega + r\omega_s)$, con $\Omega = \omega T$. Si $T = 40\mu seg.$ entonces $\omega_s = \frac{2\pi}{T} = 50000\pi$, además el ancho de banda es $\omega_0 = 2\pi f_0 = 6000\pi \approx 18849[rad/s]$.

De acuerdo al enunciado $X_a(\omega)$ es:



Donde los limites de la función triangular son $\pm\omega_0$. Para encontrar el espectro de $x(n)$ debemos desplazar este grafico en múltiplos de ω_s y sumar. Si graficamos hasta los dos primeros desplazamientos obtenemos:



Notar que la distancia entre los centros de los espectros es 2π y que estos no se traslapan.

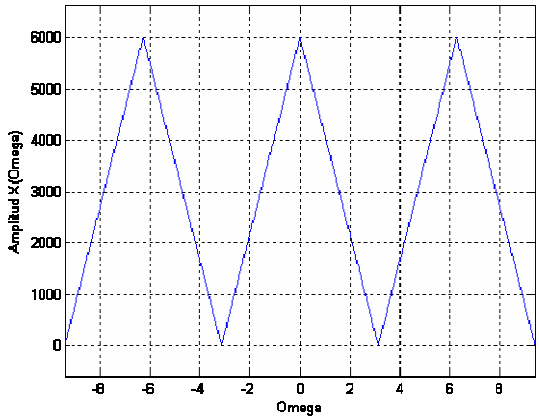
3.2

Para reducir la cantidad de memoria utilizada durante el procesamiento es necesario minimizar la cantidad de muestras sin perder información. Para estos es necesario muestrear a la frecuencia de Nyquist, es decir $\omega_s = 2\omega_0$, o equivalentemente que el periodo de muestreo sea $\mathrm{T} = \frac{\pi}{\omega_0} = 166.67\mu\mathrm{seg}.$

Si muestreamos desde un tiempo $t = 0$ hasta $t = t_{\max}$, recolectaríamos $N = \frac{t_{\max}}{T}$ muestras.

En el primer caso $N = 25000 t_{\max}$ y en el caso óptimo $N = 6000 t_{\max}$, por lo tanto utilizaríamos solo el 24% de la memoria original.

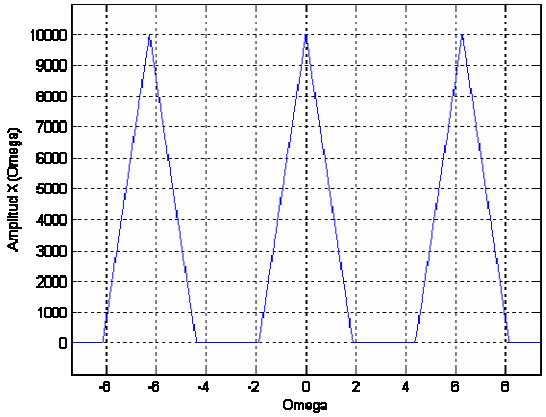
Al muestrear con tasa óptima, el espectro de $x(n)$ sería:



La distancia entre los centros de los espectros es 2π y la distancia entre ellos es mínima.

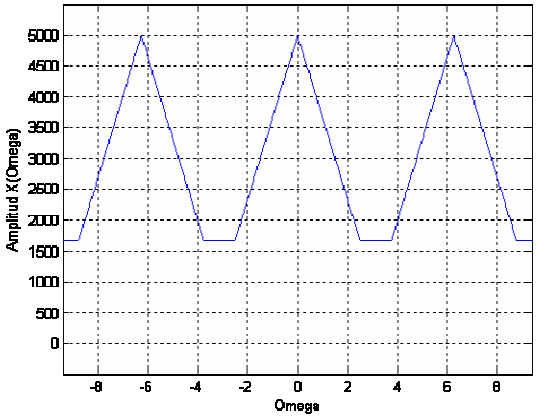
3.3

Si $T = 100\mu seg.$ entonces $\omega_s = \frac{2\pi}{T} = 20000\pi$ y el gráfico del espectro de $x(n)$ es:



En este caso el total de muestras es $N = 10000 t_{\max}$ y si muestreamos con tasa óptima utilizamos el 60% de la memoria necesario para los datos obtenidos con $T = 100 \mu seg$.

3.4 Si $T = 200 \mu seg.$ entonces $\omega_s = \frac{2\pi}{T} = 10000\pi$ y el gráfico del espectro de $x(n)$ es:



En este caso observamos que $\omega_s \geq 2\omega_0$ y que los espectros desplazados se traslapan, fenómeno que conocemos como “aliasing”. En este caso la cantidad de muestras es $N = 5000 t_{\max}$, que es inferior al óptimo, pero como se observa en el gráfico se pierde información de la señal.

ASIGNACIÓN DE PUNTAJE

3.1	1.5 punto (gráficos y comentarios)
3.2	1.5 punto (gráficos y comentarios)
3.3	1.5 puntos (gráficos y comentarios)
3.4	1.5 puntos (gráficos y comentarios)