Interrogación 1

◁ *Lunes 31 de agosto, 2009 ⊗ 18:00-19:30* ▷

1. Un transmisor envía un tren de pulsos:

$$x(t) = \sum_{n=\infty}^{\infty} p(t-2n) - p(t-(2n+1)), \quad t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$$

y es recibida por un sistema integrador conectado en cascada con un muestreador con reteción (ZOH), como se muestra en la fig. 1, tal que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau, \quad \mathbb{R}$$

y

$$z(t) = y(kT), \quad kT \leq t < kT + T, \quad t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$$

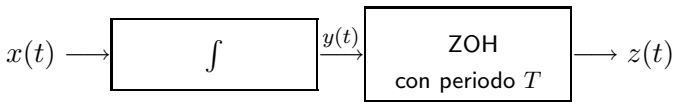


Figura 1: Receptor del problema 1.

   (a) Grafique en el espacio asignado (fig. 3) la señales $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$, con $T = 0.25$.
   (b) Suponiendo que (i) se muestrea (sin retención) la señal enviada, que (ii) el integrador se reemplaza por un sumador $y(k) = \sum_{n=-\infty}^{k} x(k)$, y que (iii) se elimina el bloque ZOH, grafique en el espacio asignado (fig. 4) las señales $x(k)$, $y(k)$.
   (c) Calcule la energía y potencia de las señales en los dos casos anteriores.

2. Considere dos señales periódicas $x_1(t)$ y $x_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, determine en cada uno de los siguientes casos si $y(t) = x_1(t) + x_2(t)$ es periódica o no. Justifique su respuesta e indique el valor del periodo de la señal $y(t)$ en caso que sea periódica.

   (a) $x_1(t) = \sin(2\pi\sqrt{2}t)$, $x_2(t) = \sin(4\pi t)$.
   (b) $x_2(t) = \sin(6\pi^2 t)$, $x_2(t) = \cos(12\pi^2 t)$.

3. Para el circuito RLC de la figura 2, donde $x(t)$ es la señal de voltaje recibido desde una antena e $y(t)$ es la señal de salida:

   (a) Encuentre la respuesta $h(t)$ al impulso $\delta(t)$ (condiciones iniciales nulas).
   (b) Determine la respuesta $y(t)$ cuando la señal recibida es $x(t) = u(t) - u(t-1)$ (un pulso unitario).
   (c) Suponga que el circuito recibe una señal de voltaje $x(t) = h(-t+T)$, $T = 2$, encuentre la respuesta $y(t)$ del circuito.

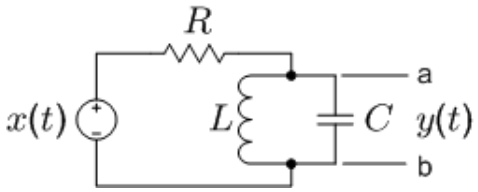


Figura 2: Circuito RLC problema 3.

NOMBRE:

1. Solución Pregunta 1

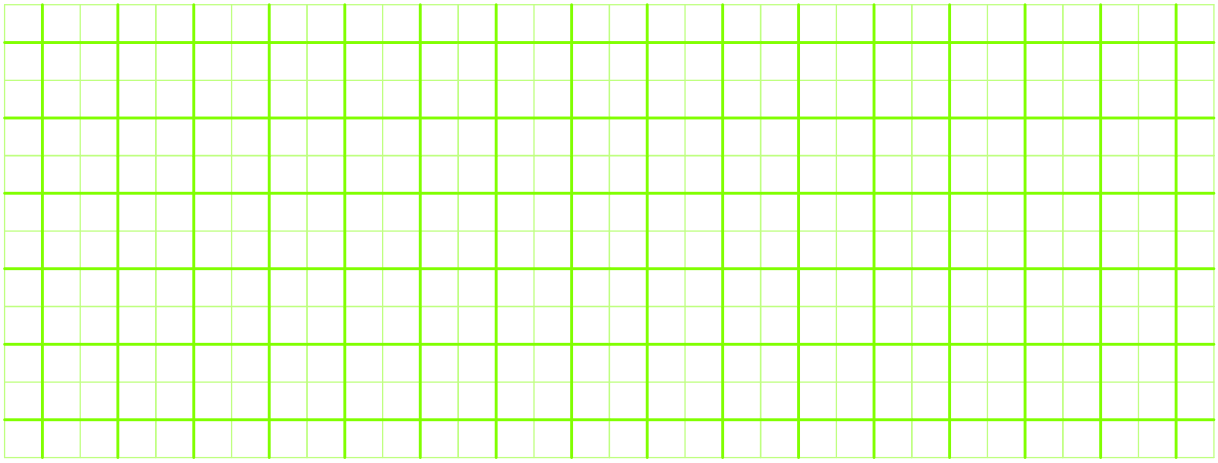


Figura 3: Señales $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ de la pregunta 1.a.

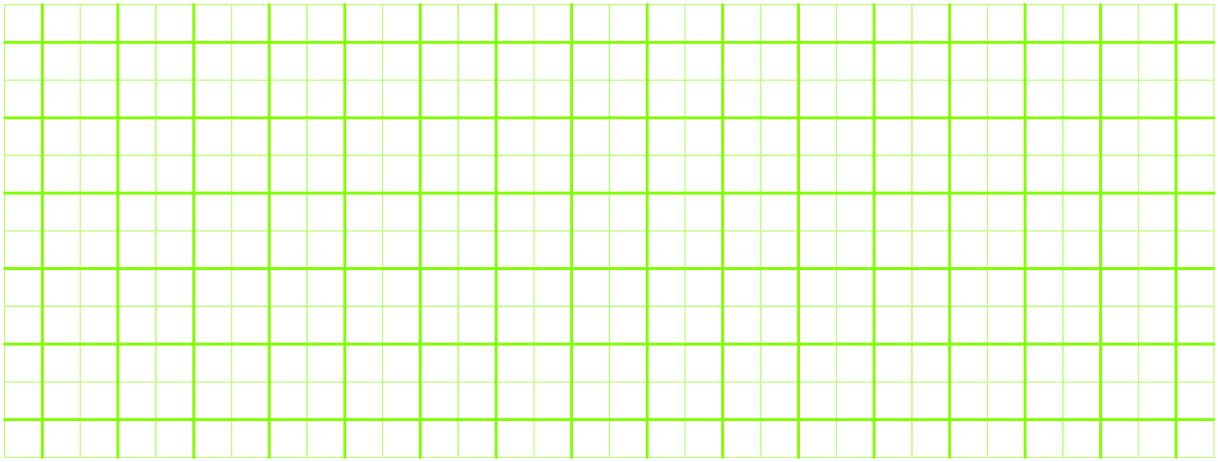


Figura 4: Señales $x(k)$ e $y(k)$ de la pregunta 1.b.

NOMBRE:

2. Solución Pregunta 2

NOMBRE:

3. Solución Pregunta 3

Pauta Interrogación 1

◁ *Lunes 31 de agosto, 2009* ⊗ *18:00-19:30* ▷

1. (a) (2 ptos) Ver gráfico. (-1.0 supuestos inconsistentes, -2.0 gráfico equivocado)

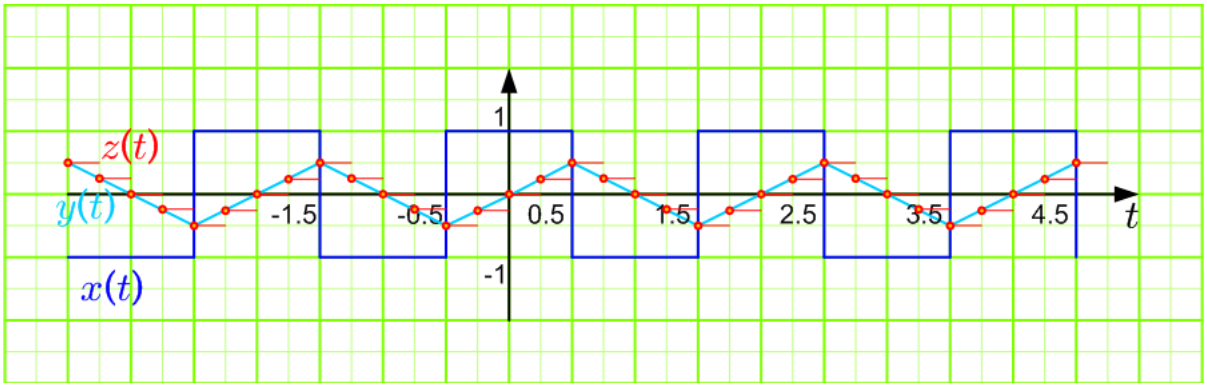


Figura 1: Sistema integrador con ZOH.

(b) (2 ptos) Ver gráfico. (-1.0 supuestos inconsistentes, -2.0 gráfico equivocado)

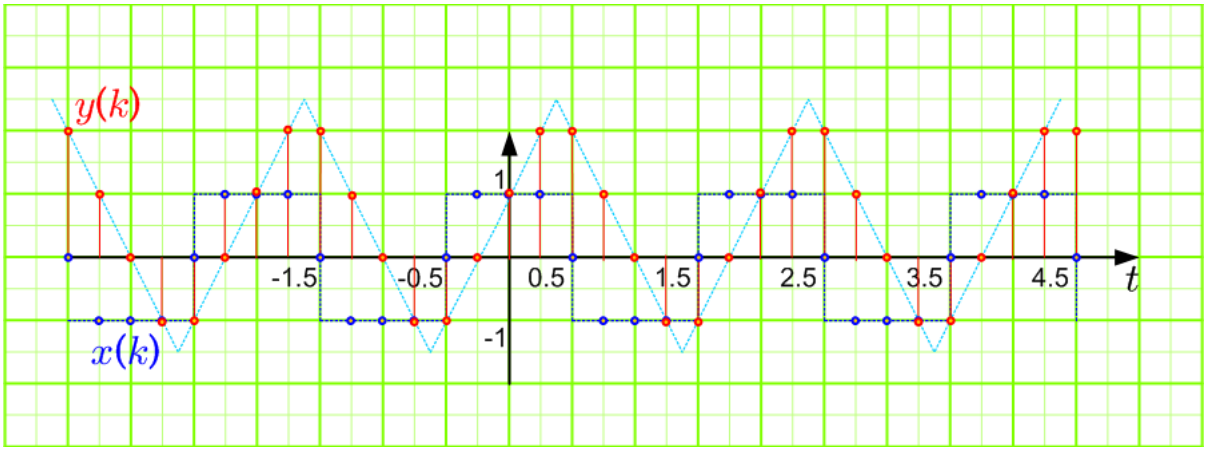


Figura 2: Sistema sumador con muestreador.

(c) (2 ptos)

Energía (0.4 ptos)
En ambos casos la energía es infinita porque $|z(t)| \nrightarrow 0$, para $t \to \infty$, $|y(k)| \nrightarrow 0$ para $k \to \infty$. (-0.4 si no indica la energía)

Potencia Promedio – Caso 1 (a) (0.8 ptos)
Del gráfico para el caso 1 (a), el cual considera que un periodo de la onda se vuelve a repetir en el instante $t = 0$, y que por lo tanto la onda "empezó" en $t = -\infty$ justamente en la mitad del semi-ciclo positivo, con la condición inicial del integrador en $y(-\infty) = 0$, (por periodicidad y

simetría de $x(t)$, entonces $y(0) = 0$), se tiene que la salida del bloque ZOH será:

$$z(t) = \begin{cases} z_1 \equiv 0, & 0 + 2n \leq t < 0.25 + 2n \\ z_2 \equiv 0.25, & 0.25 + 2n \leq t < 0.50 + 2n \\ z_3 \equiv 0.5, & 0.50 + 2n \leq t < 0.75 + 2n \\ z_4 \equiv 0.25, & 0.75 + 2n \leq t < 1.00 + 2n \\ z_5 \equiv 0, & 1.00 + 2n \leq t < 1.25 + 2n \\ z_6 \equiv -0.25, & 1.25 + 2n \leq t < 1.50 + 2n \\ z_7 \equiv -0.50, & 1.50 + 2n \leq t < 1.75 + 2n \\ z_8 \equiv -0.25, & 1.75 + 2n \leq t < 2.00 + 2n \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

luego

$$\begin{aligned} P_{PROM} &= \frac{1}{T_{\text{señal}}} \int_0^{T_{\text{señal}}} z^2(t)dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 z^2(t)dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{8} z_i^2 T \\ &= \frac{1}{8} \left(z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_8^2 \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(0 + 1/16 + 1/4 + 1/16 + 0 + 1/16 + 1/4 + 1/16 \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(1/4 + 1/2 \right) = 3/32 \end{aligned}$$

Si se asume una condición del integrador tal que $y(0) \neq 0$, la potencia promedio sería

$$\begin{aligned} P_{PROM} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{8} (z_i + y(0))^2 T \\ &= \frac{1}{8} \left(\sum_{i=1}^{8} z_i^2 + 2y(0) \sum_{i=1}^{8} z_i + 8y(0)^2 \right) \\ &= \frac{1}{8} \left(3/4 + 2y(0) \cdot 0 + 8y(0)^2 \right) \end{aligned}$$

Dos casos usuales son $y(0) = 1/2$ o $y(0) = -1/2$, si se asume que la onda se integra desde el inicio del semi-ciclo negativo o semi-ciclo positivo y no desde la mitad del semi-ciclo positivo con $y(0) = 0$ considerando inicialmente. Estos casos resultan en $P_{PROM} = 11/32$. Notar que si $y(0) \neq 0$:

$$P_{PROM} = P_{PROM,y(0)=0} + y(0)^2,$$

en otras palabras, a la potencia promedio de la señal se añade la potencia promedio de una señal continua (en el sentido eléctrico) o constante (en la terminología matemática).

Potencia Promedio – Caso 1 (b) (0.8 ptos)

En el caso 1 (b) la potencia se calcula de manera similar a 1 (a) a partir del valor de intensidad de cada muestra según:

$$P_{PROM} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y(k)^2$$

donde N es el número de muestras en un periodo. En este caso 8 muestras por periodo dado $T = 0.25$ (periodo de muestreo). Otra manera de determinar N es recordando que para una señal de periodo $T_{\text{señal}}$:

$$N = \frac{T_{\text{señal}}}{T} = \frac{2}{0.25} = 8 \text{ [muestras por periodo]}$$

Bajo un supuesto similar al del caso (a), en el que la señal de entrada $x(k)$ tiene un ciclo que vuelve a iniciarse en $k = 0$, y que la salida del sumador en $k = 0$ es cero, la señal tendrá la forma mostrada en el gráfico del punto 1 (b), con valores $y(k; k = 0, 1, 2, \ldots, 7) = \{1, 2, 2, 1, 0, -1, -1, 0\}$:

$$P_{PROM} = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} y(k)^2 = \frac{1}{8}(1 + 4 + 4 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0) = \frac{3}{2}$$

2. Bastaba con verificar si la razón de las frecuencias (o periodos) era un número racional.

   (a) (3 ptos.) $f_1 = \sqrt{2}$, $f_2 = 2$, $\rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{1}{f_1}}{\frac{1}{f_2}} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{2}{\sqrt{2}}$, luego $y(t)$ no es periódica.

   (b) (3 ptos.) $f_1 = 3\pi$, $f_2 = 6\pi$, $\rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{1}{f_1}}{\frac{1}{f_2}} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{6\pi}{3\pi} = 2$, luego $y(t)$ es periódica.

Observación 1:

Como se vió en clases, dos señales periódicas $x_1(t)$ y $x_2(t)$, respectivamente con periodos T_1 y T_2, al sumarse generan una señal $y(t) = x_1(t)+x_2(t)$ que es periódica de periodo T, si T es un múltiplo común de T_1 y T_2, es decir:

$$y(t) = y(t+T) = x_1(t+T) + x_2(t+T) = x_1(t+kT_1) + x_2(t+lT_2)$$

luego

$$T = kT_1 = lT_2 \;\Rightarrow\; \frac{T_1}{T_2} = \frac{l}{k}$$

La razón de los periodos debe ser un número racional, en caso contrario, la suma de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ no genera una señal periódica.

Observación 2:

Era posible verificar la periodicidad del caso 1 (b) también de otras maneras. Por ejemplo, notando que:

$$x_2(t) = \cos(12\pi^2 t) = \cos(2 \cdot 6\pi^2 t) = 1 - 2\sin^2(6\pi^2 t)$$

donde la última igualdad es válida porque $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$. *Debería ser más que claro que la frecuencia de* $x_2(t)$ *es* 6π, *ya que al multiplicar una sinusoidal consigo misma su frecuencia se duplica, como también puede fácilmente verse al graficar. Mientras que la frecuencia de* $x_1(t)$ *es* 3π *por su definición. En otras palabras,* $x_1(t)$ *es la mitad de rápida, y por lo tanto el periodo de* $x_2(t)$ *está contenido dos veces en el periodo de* $x_1(t)$.

Nótese también que la fase de la señal es irrelevante en la derivación de estas conclusiones. Por lo que realizar un reemplazo del tipo:

$$x_2(t) = \cos(12\pi^2 t) = \sin\left(12\pi^2 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

tan solo permite ver que $x_2(t)$ *es una sinusoide el doble de rápida que* $x_1(t)$, *que además se encuentra desplazada con un adelanto de fase de* $\frac{\pi}{2}$ *con respecto a* $x_1(t)$.

3. (a) 1 pto. por la formulación de la ecuación diferencia, 3 ptos. por la solución correcta.
   (b) 1 pto. por expresar correctamente la respuesta del circuito al pulso.
   (c) 1 pto. por expresar correctamente la respuesta del circuito a $h(-t+T)$.

Formulación de la ecuación diferencial

Para el circuito RLC de la figura, la corriente por la resistencia es igual a la suma de las corrientes por el condensador e inductancia:

$$i_R = i_C + i_L$$

Igualando el voltaje de la fuente a las caídas de tensiones en la resistencia y condensador:

$$x = Ri_R + y = R(i_C + i_L) + y$$

Como las corrientes $i_C = dV_c/dt = Cdy/dt$ e $i_L = \frac{1}{L}\int_0^t V_L dt + i_L(0) = \frac{1}{L}\int_0^t y dt$ es posible escribir la ecuación anterior como:

$$x = R(C\dot{y} + \frac{1}{L}\int_0^t y dt) + y$$

Como $R = 1$, $L = 1$ y $C = 1$, la ecuación diferencial que describe el sistema es:

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = \dot{x}$$

Métdo 1: Solución de la ecuación diferencial por el método de variación de parámetros

La ecuación es una ecuacuón diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes de segundo orden, luego la solución homegénea tendrá una base compuesta de funciones de la forma $e^{\lambda t}$ de dimensión 2. La solución homogénea es de la forma:

$$y_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

A partir de la ecuación característica:

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

se obtiene:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Con condiciones iniciales nulas $y(0) = \dot{y}(0) = 0$:

$$0 = C_1 + C_2$$

y

$$0 = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$$

Por lo tanto, que $C_2 = -C_1$ y $\lambda_1 C_1 - \lambda_1^* C_1 = 0 \Rightarrow C_1(\lambda_1 - \lambda_1^*) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ y $C_2 = 0$.

La solución particular se encuentra en términos de la base de la solución de la ecuación homogénea $\{y_1, y_2\} = \{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_1^* t}\}$. Si $\lambda_1 = \lambda_2^* = \alpha + j\beta \in \mathbb{C}$, la base puede redefinirse como una combinación lineal de la base original $\{\frac{e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_1^* t}}{2}, \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_1^* t}}{j2}\}$, es decir $\{y_1, y_2\} = \{e^{\alpha t}\cos(\beta t), e^{\alpha t}\sin(\beta t)\}$.

Empleando la base $\{y_1, y_2\}$, la solución particular a la ecuación no-homegénea (o forzada) y_p se encuentra mediante el *método de variación de parámetros*. Para esto:

$$y_p(t) = a_1(t)y_1(t) + a_2(t)y_2(t)$$

donde a_1, a_2 son parámetros que deben encontrarse, recordando que y_p satisface la ecuación diferencial del sistema, es decir:

$$\ddot{y}_p + \dot{y}_p + y_p = f(t)$$

con $f(t) = \delta'(t)$.

Lo anterior da un conjunto de ecuaciones que, empleando la regla de Cramer y el Wronskiano, equivalen a resolver:

$$a_i'(t) = \frac{W(y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n-1} \\ f \end{bmatrix}, y_{i+1}, \ldots, y_n)}{W(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$$

donde el Wronskiano:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_{n-1'} & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

y

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n-1} \\ f \end{bmatrix}, y_{i+1}, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{i-1} & 0 & y_{i+1} & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_{i-1}' & 0 & y_{i+1}' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_{i-1}^{(n-2)} & 0 & y_{i+1}^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_{i-1}^{(n-1)} & f & y_{i+1}^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

En este caso:

$$a_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{\alpha t}\sin(\beta t) \\ \delta' & \alpha e^{\alpha t}\sin(\beta t) - \beta e^{\alpha t}\cos(\beta t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{\alpha t}\cos(\beta t) & e^{\alpha t}\sin(\beta t) \\ \alpha e^{\alpha t}\cos(\beta t) - \beta e^{\alpha t}\sin(\beta t) & \alpha e^{\alpha t}\sin(\beta t) + \beta e^{\alpha t}\cos(\beta t) \end{vmatrix}} = -\frac{\delta'\sin(\beta t)}{e^{\alpha t}\beta}$$

$$a_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^{\alpha t}\cos(\beta t) & 0 \\ \alpha e^{\alpha t}\cos(\beta t) - \beta e^{\alpha t}\sin(\beta t) & \delta' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{\alpha t}\cos(\beta t) & e^{\alpha t}\sin(\beta t) \\ \alpha e^{\alpha t}\cos(\beta t) - \beta e^{\alpha t}\sin(\beta t) & \alpha e^{\alpha t}\sin(\beta t) + \beta e^{\alpha t}\cos(\beta t) \end{vmatrix}} = \frac{\delta'\cos(\beta t)}{e^{\alpha t}\beta}$$

Ahora, integrando por partes:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\delta'(t)dt \;=\; \delta(t)f(t)|_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\delta(t)f'(t)dt \;=\; \delta(t_2)f(t_2) - \delta(t_1)f(t_1) - f'(0)$$

específicamente con $t_1 = 0$ y $t_2 = t$, se obtiene:

$$\begin{aligned} a_1(t) &= 0 - \frac{-\beta\cos(\beta\cdot 0)e^{\alpha\cdot 0} + \alpha\sin(\beta\cdot 0)e^{\alpha\cdot 0}}{e^{2\alpha\cdot 0}\beta} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned} a_2(t) &= -\frac{\delta(t)}{\beta} - \frac{-\beta\sin(\beta\cdot 0)e^{\alpha\cdot 0} - \alpha\cos(\beta\cdot 0)e^{\alpha\cdot 0}}{e^{2\alpha\cdot 0}\beta} \\ &= -\frac{\delta(t)}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} \end{aligned}$$

Finalmente la solución será:

$$\begin{aligned} h(t) \;=\; y_p(t) \;&=\; e^{\alpha t}\left[\cos(\beta t) + \frac{\alpha}{\beta}\sin(\beta t)\right] - e^{\alpha t}\sin(\beta t)\frac{\delta(t)}{\beta} \\ &=\; \frac{1}{\beta}e^{\alpha t}\left[\beta\cos(\beta t) + \alpha\sin(\beta t)\right] \end{aligned}$$

con $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. La última igualdad se debe a que $\sin(\beta t) = 0$ para $t = 0$ y $\delta(t) = 0$ para $t > 0$.

Método 2: Solución de la ecuación diferencial empleando la transformada de Laplace

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación:

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = \dot{x}$$

se obtiene asumiendo condiciones iniciales nulas:

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + s + 1} X(s)$$

La propiedad de la transformada inversa:

$$sF(s) \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\rightarrow} \frac{df}{dt}$$

para el sistema con condiciones iniciales nulas, puede emplearse para encontrar la solución. Para esto basta calcular la transformada inversa de

$$F(s) = \frac{X(s)}{s^2 + s + 1} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

donde $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$, para obtener $f(t)$, y calcular $\frac{df}{dt}$ para encontrar la transformada inversa de $sF(s)$.

Como

$$\frac{1}{s^2 + s + 1} = \frac{C_1}{s - \lambda_1} + \frac{C_2}{s - \lambda_2} = \frac{C_1(s - \lambda_2) + C_2(s - \lambda_1)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$$

con $\lambda_1 = \lambda_2^* = \alpha + j\beta$ las raíces de la ecuación característica: $s^2 + s + 1 = 0$, debe cumplirse que:

$$C_1(s - \lambda_1^*) + C_2(s - \lambda_1) = (C_1 + C_2)s - (C_1\lambda_1^* + C_2\lambda_1) = 1$$

es decir:

$$C_1 + C_2 = 0$$

y

$$-(C_1\lambda_1^* + C_2\lambda_1) = 1$$

Reemplazando $C_2 = -C_1$ en la ecuación anterior:

$$C_1(\lambda_1^* + \lambda_1) = -1$$

y por lo tanto,

$$C_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_1^*} = \frac{1}{j2\beta}$$

$$C_2 = -C_1 = -\frac{1}{j2\beta}$$

La transformada inversa será entonces:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{j2\beta} e^{\lambda_1 t} - \frac{1}{j2\beta} e^{\lambda_1^* t} \\ &= \frac{e^{\alpha t}}{\beta} \left(\frac{e^{j\beta t} - e^{-j\beta t}}{j2} \right) \\ &= \frac{e^{\alpha t}}{\beta} \sin(\beta t) \end{aligned}$$

Luego

$$h(t) = \frac{df}{dt} = \alpha \frac{e^{\alpha t}}{\beta} \sin(\beta t) + e^{\alpha t} \cos(\beta t) = \frac{1}{\beta} e^{\alpha t} \left[\alpha \sin(\beta t) + \beta \cos(\beta t) \right]$$

Método 3: Empleando la descripción del sistema en el espacio de estados

Definiendo los polinomios de característicos del sistema:

$$q(v) = v^2 + v + 1$$

y

$$p(v) = v$$

La ecuación diferencial puede escribirse:

$$p(\frac{d}{dt})x = q(\frac{d}{dt})y$$

La relación entre la salida y la entrada puede expresarse:

$$\frac{y}{x} = \frac{p(\frac{d}{dt})}{q(\frac{d}{dt})}$$

Multiplicando el numerador y el denominador de la expresión anterior por una señal z auxiliar:

$$\frac{y}{x} = \frac{p(\frac{d}{dt})}{q(\frac{d}{dt})}\frac{z}{z} =$$

es posible decir que la salida del sistema es:

$$y = p(\frac{d}{dt})z$$

y la entrada

$$x = q(\frac{d}{dt})z$$

Definiendo las variables de estado $x_1 = z$, $x_2 = \dot{z}$, se tiene que:

$$x = \ddot{z} + \dot{z} + z = \dot{x}_2 + x_2 + x_1$$

y

$$y = \dot{z} = x_2$$

Además,

$$\dot{x}_1 = x_2$$

Luego, el sistema en el espacio de los estados estará descrito por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} x$$

y

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

La solución está definida por:

$$y(t) = Ce^{At} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bx(\tau) d\tau$$

con condiciones iniciales $x_1(0) = x_2(0) = 0$.

Reemplazando $x(\tau) = \delta(\tau)$, la solución estará dada por:

$$h(t) \;=\; y(t) \;=\; Ce^{At}B$$

$$e^{At} = I + At + A^2\frac{t^2}{2} + \ldots + A^n\frac{t^n}{n!} + \ldots$$

Es fácil verificar que

$$A^{1+3k} = A, k = 0, 1, 2, \ldots$$
$$A^{2+3k} = A^2, k = 0, 1, 2, \ldots$$
$$A^{3+3k} = A^3, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Completando las series de Taylor:

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) - \frac{1}{2}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)\right]$$

Otra manera de obtener e^{At} es a través de la transformada de Laplace:

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}$$

donde

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix}}{s^2 + s + 1}$$

Al multiplicar por C y B se obtiene el elemento inferior-derecho de la matriz anterior, que justamente corresponde a la función de Laplace utilizada en el método 2.

Observación:
Si bien no se pedía graficar la respuesta al impulso del circuito, esta puede graficarse usando Matlab mediante los siguientes comandos:

```
>> sys=tf([0 1 0],[1 1 1])

Transfer function:
     s
-----------
s^2 + s + 1

>> impulse(sys)
```

o bien:

```
>> alpha=-1/2; beta=sqrt(3)/2;
>> t=0:0.01:12;
>> y=(1/beta)*exp(alpha*t).*[beta*cos(beta*t)+alpha*sin(beta*t)];
>> plot(t,y)
```

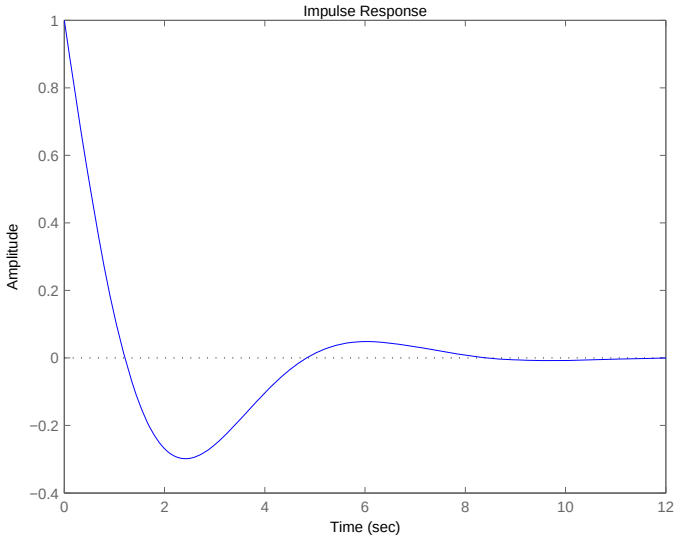


Figura 3: Respuesta al impulso del circuito RLC del problema 3.

Respuesta al pulso $x(t) = u(t) - u(t-1)$

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \begin{cases} \int_0^t h(\tau)d\tau, & 0 \le t < 1 \\ \int_{t-1}^t h(\tau)d\tau, & 1 \le t < \infty \end{cases}$$

Respuesta al $x(t) = h(-t+T)$

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)h(T-\tau)d\tau$$

Si $x(t) \to y(t)$, por invarianza en el tiempo $x(t+T) \to y(t+T)$. Luego basta calcular, la respuesta ante $x(t) = h(-t)$ y desplazar la salida en T:

$$y_1(t) = \int_0^t h(t-\tau)h(-\tau)d\tau$$

luego

$$y(t) = y_1(t+T)$$

Como

$$h(t) = \frac{1}{\beta}e^{\alpha t}[\beta\cos(\beta t) + \alpha\sin(\beta t)]$$

entonces

$$y_1(t) = \frac{1}{\beta^2}\int_0^t e^{\alpha(t-2\tau)}[\beta\cos(\beta(t-\tau)) + \alpha\sin(\beta(t-\tau))][\beta\cos(\beta\tau) - \alpha\sin(\beta\tau)]d\tau$$

se reduce a

$$y_1(t) = \frac{1}{\beta^2}e^{\alpha t}\int_0^t e^{-2\alpha\tau}[\beta\cos(\beta t)\cos(\beta\tau)+\beta\sin(\beta t)\sin(\beta\tau)+\alpha\sin(\beta t)\cos(\beta\tau)-\alpha\sin(\beta\tau)\cos(\beta t)][\beta\cos(\beta\tau)-\alpha\sin(\beta\tau)]d\tau$$

$$y_1(t) = \frac{1}{\beta^2}e^{\alpha t}\int_0^t e^{-2\alpha\tau}\left(\sin^2(\beta\tau)[\alpha^2\cos(\beta t) - \alpha\beta\sin(\beta t)] + \cos^2(\beta\tau)[\beta^2\cos(\beta t) + \alpha\beta\sin(\beta t)] + \sin(\beta\tau)\cos(\beta\tau)[(\beta^2-\alpha^2)\sin(\beta t) - 2\alpha\beta\cos(\beta t)]\right)d\tau$$

Derivada de un Impulso

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left(u(t+\epsilon/2)-u(t-\epsilon/2)\right)\right] \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left(\frac{d}{dt}u(t+\epsilon/2)-\frac{d}{dt}u(t-\epsilon/2)\right) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left(\delta(t+\epsilon/2)-\delta(t-\epsilon/2)\right) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left(\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\left(u(t+\alpha/2+\epsilon/2)-u(t-\alpha/2+\epsilon/2)\right)-\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\left(u(t+\alpha/2-\epsilon/2)-u(t-\alpha/2-\epsilon/2)\right)\right) \\
&= \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\left(\delta(t+\alpha/2)-\delta(t-\alpha/2)\right)
\end{aligned}$$

La derivada de un impulso son dos impulsos, uno positivo seguido de otro negativo por una separación infinitesimal. En Teoría Electromagnética, la derivada de la función Delta de Dirac representa un dipólo magnético, y recibe a veces el nombre de "doblete" (o "doublet" en inglés). El doblete solo tiene sentido como distribución, tampoco es una función propiamente tal, y solo se puede definir formalmente de manera indirecta. Como se vió en el primer método para la solución del problema 3:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\delta'(t)dt \;=\; \delta(t)f(t)|_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\delta(t)f'(t)dt \;=\; \delta(t_2)f(t_2)-\delta(t_1)f(t_1)-f'(0)$$

.