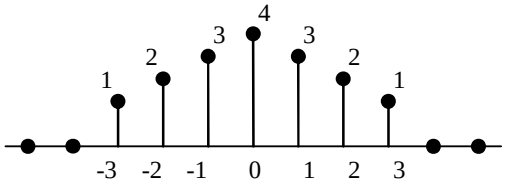
Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica

IEE 2102 ANALISIS DE SEÑALES 2006-1

INTERROGACION Nº 1

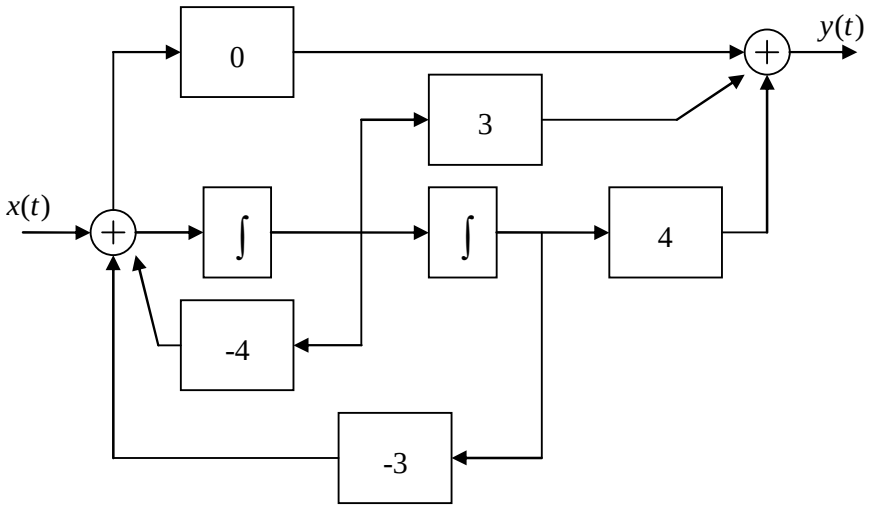
1. Considere la señal $x[n]$ que se muestra en la figura.

1.1 Indique cuáles de estas propiedades satisface $x[n]$: simetría par, simetría impar, periódica, de energía finita, de potencia media finita.
1.2 Calcule la energía de $x[n]$.
1.3 Obtenga y grafique la señal $y[n] = \frac{1}{3}\left(x[n-1] + x[n] + x[n+1]\right)$.
1.4 Obtenga y grafique la convolución $z[n] = x[n] * x[n]$. Qué propiedad observa?



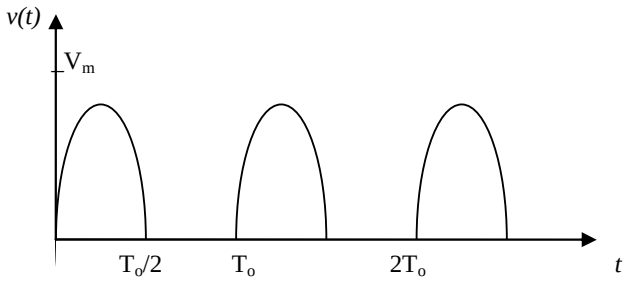
2. El diagrama en bloques de la figura 2 representa el modelo de un sistema mecánico.

2.1 Obtenga una ecuación de estado para el sistema.
2.2 Determine la correspondiente matriz transición de estado.
2.3 Obtenga la función respuesta al impulso.
2.4 Plantee la expresión de la respuesta del sistema para $x(t) = u(t)$, $y(0^-) = 2$, $\dot{y}(0^-) = -2$.



3. Para la señal rectificada de media onda de la figura se pide:

3.1 Obtener la componente continua.
3.2 Determinar el primer armónico.
3.3 Obtener una aproximación que considere los resultados de 3.1 y 3.2.
3.4 Plantear una expresión que permita determinar el error porcentual en la aproximación 3.3.



Observaciones
Tiempo: 2 horas.
Las aclaraciones de enunciado deben solicitarse en voz alta y sólo en los primeros 15 minutos. Pasado este tiempo no se aceptan más preguntas; si considera que en alguna pregunta falta información, realice una suposición razonable que no se contradiga con el enunciado y déjelo claramente expresado en su respuesta.
No está permitido utilizar apuntes ni calculadora.
Responda las preguntas en hojas separadas. No olvide colocar su nombre en cada hoja de respuesta.
Las 3 preguntas tienen igual ponderación.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica

IEE 2102 ANALISIS DE SEÑALES 2006-1

PAUTA INTERROGACION N° 1

PREGUNTA 1

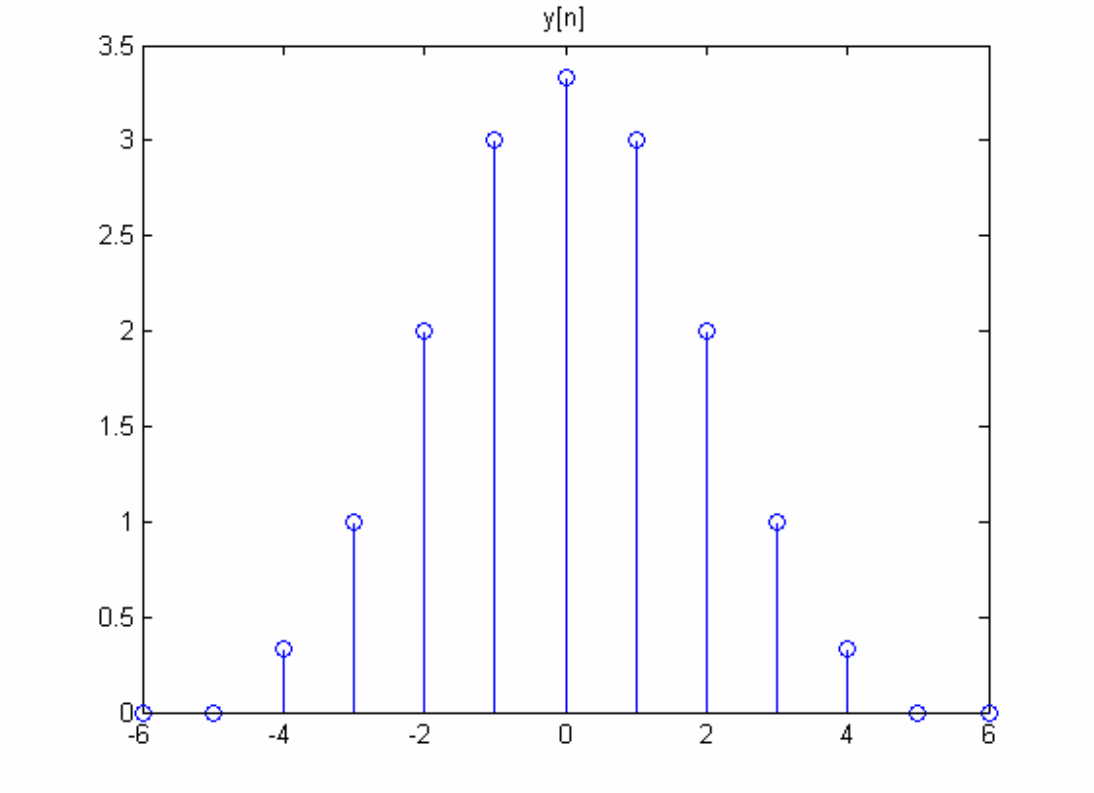
1.1 La señal cumple con las siguientes propiedades:

- Simetría Par 0.3 Pts.
- No es señal Impar 0.3 Pts.
- No es periódica 0.3 Pts.
- Tiene energía finita 0.3 Pts.
- No es de potencia media finita 0.3 Pts.

1.2 La energía de la señal esta dada por:

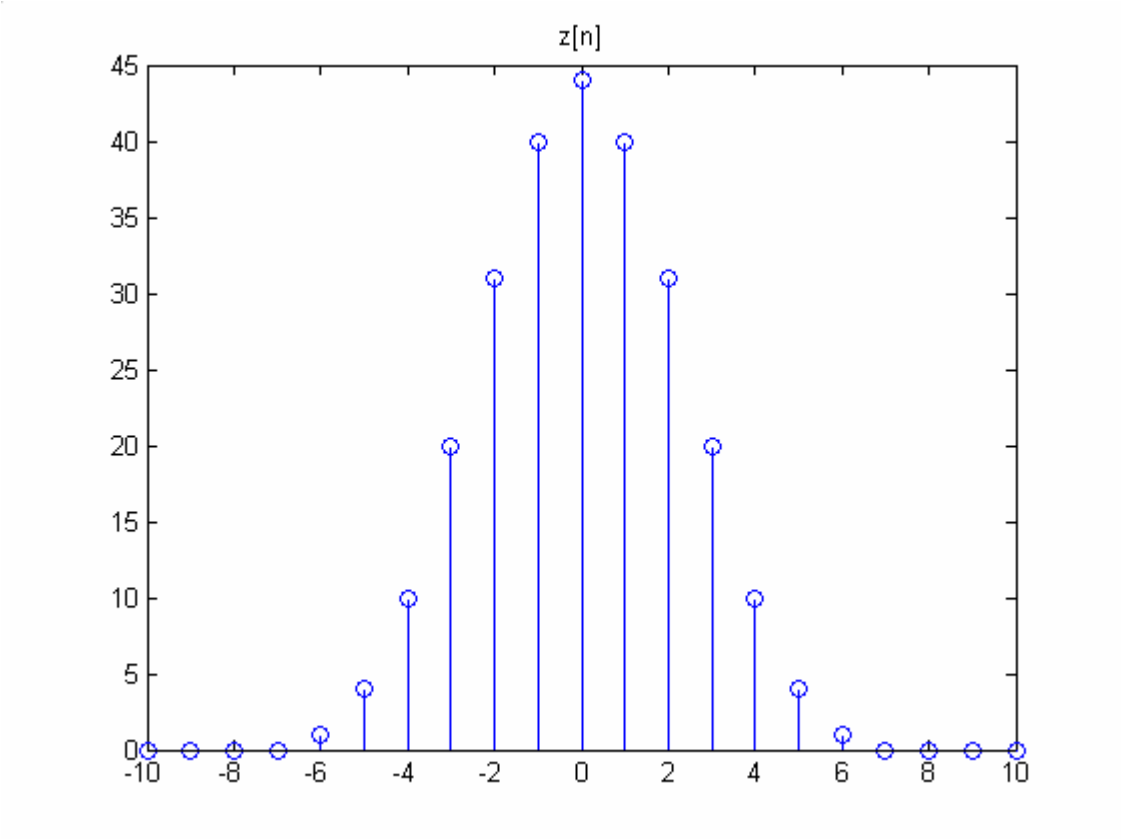
$$E = \sum x[n]^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 44$$ 1.5 Pts.

1.3 y[-4]=y[4]=1/3 1.5 Pts.
y[-3]=y[3]=1
y[-2]=y[2]=2
y[-1]=y[1]=3
y[0]=10/3



1.4 Convolución 1.5 Pts.

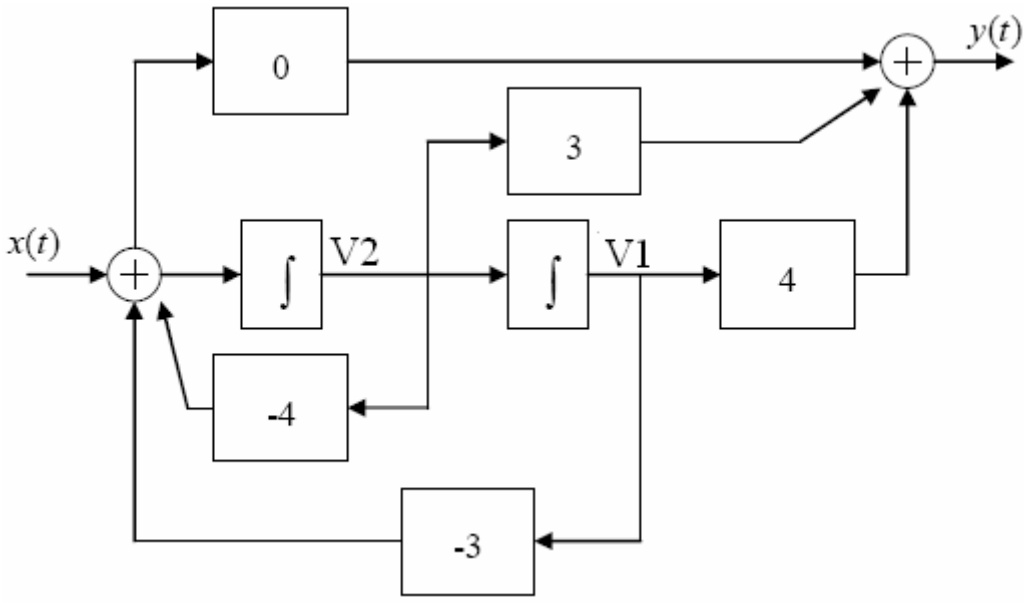
z[-6]=z[6]=1
z[-5]=z[5]=4
z[-4]=z[4]=10
z[-3]=z[3]=20
z[-2]=z[2]=31
z[-1]=z[1]=40
z[0]=44



Se puede observar que:

- z[0] es igual a la energía de la señal.
- z[0] es el máximo de la función
- z es simétrica

PREGUNTA 2



2.1 Como variables de estado se escoge a V_1, V_2

$$\dot{V}_1(t) = V_2(t)$$
$$\dot{V}_2(t) = -3V_1(t) - 4V_2(t) + x(t)$$
$$y(t) = 4V_1(t) + 3V_2(t)$$

Ecuación de estado del sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1(t) \\ \dot{V}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x(t)$$

1,5 puntos

$$y(t) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{bmatrix}$$

Donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad c = \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}$$

2.2. La solución en el dominio del tiempo para un sistema con la siguiente ecuación de estado esta descrito en la ecuación (1).

$$\dot{V}(t) = A \cdot V(t) + b \cdot x(t)$$
$$y(t) = c \cdot V(t)$$

$$y(t) = c \cdot \Phi(t) \cdot V_0 + \int_0^t c \cdot \Phi(t-\tau) \cdot b \cdot x(\tau) d\tau \qquad (1)$$

Donde $\Phi(t)$ es la matriz transición de estados.

Se puede demostrar que la matriz transición de estado tiene la siguiente forma:

$$\Phi(t) = \exp[At]$$

Se puede encontrar la matriz $\Phi(t)$ de dos formas:

Los valores propios de la matriz A son:

$$\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = -3$$

Los vectores propios de la matriz A son:

$$P = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

a) Diagonalización

$$\Phi(t) = \exp[At] = P \cdot \begin{bmatrix} \exp(\lambda_1 t) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2 t) \end{bmatrix} \cdot P^{-1}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\exp[-t] - \frac{1}{2}\exp[-3t] & \frac{1}{2}\exp[-t] - \frac{1}{2}\exp[-3t] \\ -\frac{3}{2}\exp[-t] + \frac{3}{2}\exp[-3t] & -\frac{1}{2}\exp[-t] + \frac{3}{2}\exp[-3t] \end{bmatrix} \qquad \text{1,5 puntos}$$

b) Cayley – Hamilton

$$\Phi(t) = \exp[At] = \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i(t) A^i \qquad (2)$$

$$\exp[\lambda_j t] = \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i(t) \lambda_j^i \qquad j = 1, \ldots, N \qquad (3)$$

Resolviendo (2) se tiene

$$\gamma_0 = \frac{3}{2}\exp[-t] - \frac{1}{2}\exp[-3t]$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}\exp[-t] - \frac{1}{2}\exp[-3t]$$

Estos valores de γ_0 y γ_1 en (2)

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix} \frac{3}{2}\exp[-t]-\frac{1}{2}\exp[-3t] & \frac{1}{2}\exp[-t]-\frac{1}{2}\exp[-3t] \\ -\frac{3}{2}\exp[-t]+\frac{3}{2}\exp[-3t] & -\frac{1}{2}\exp[-t]+\frac{3}{2}\exp[-3t] \end{bmatrix}$$

1,5 puntos

2.3. Para la solución descrita en (1), la respuesta al impulso tiene la siguiente forma:

$$h(t)=\begin{cases} c\cdot\Phi(t)\cdot b & t\geq 0 \\ 0 & \text{En el resto} \end{cases}$$

$$h(t)=\frac{1}{2}\exp[-t]+\frac{5}{2}\exp[-3t]$$

1,5 puntos

2.4. Para plantear la solución de y(t) (descrita en (1)) solo nos hace falta encontrar V_0

Derivando y(t) con respecto al tiempo nos queda:

$$y(t)=4V_1(t)+3V_2(t)$$

$$\dot{y}(t)=-9V_1(t)-8V_2(t)+3x(t)$$

Evaluando en $t=0^-$ y sabiendo que la función u(t) en $t=0^-$ vale cero tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$4V_1(0)+3V_2(0)=2$$

$$-9V_1(0)-8V_2(0)=-2$$

$$V_0=\begin{bmatrix} V_1(0) \\ V_2(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Ahora sustituyendo y todas las variables en (1) tenemos:

$$y(t)=\frac{4}{3}+\frac{3}{2}\exp[-t]-\frac{5}{6}\exp[-3t]$$

1,5 puntos

PREGUNTA 3

3.1. Componente continua

$$V(t)=\begin{cases} Vm\cdot sen(wo\cdot t)\ldots 0<t<To/2 \\ 0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots To/2<t<To \end{cases}$$ 0,5 puntos

$$V(t)=V(t+K\cdot To)$$

$$Co=\frac{1}{To}\cdot\int_{0}^{To/2} Vm\cdot sen(wo\cdot t)\cdot dt$$ 0,5 puntos

$$Co=\frac{Vm}{\pi}$$ 0,5 puntos

3.2 Primer armónico

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{T} V(t)\cdot Exp\left[\frac{-j2n\pi\cdot t}{To}\right]\cdot dt$$

$$C_1=\frac{1}{To}\int_{0}^{To/2} Vm\cdot sen(wo\cdot t)\cdot Exp\left[\frac{-j2\pi\cdot t}{To}\right]\cdot dt$$ 0,5 puntos

$$C_1=\frac{Vm}{To}\int_{0}^{To/2}\frac{1}{2j}\cdot\left(Exp\left[\frac{j2\pi\cdot t}{To}\right]-Exp\left[\frac{-j2\pi\cdot t}{To}\right]\right)Exp\left[\frac{-j2\pi\cdot t}{To}\right]\cdot dt$$

$$C_1=\frac{Vm}{To\cdot 2j}\int_{0}^{To/2} 1-Exp\left[\frac{-j4\pi\cdot t}{To}\right]\cdot dt$$

$$C_1=\frac{Vm}{To\cdot 2j}\cdot\left[\frac{To}{2}-\frac{To}{-j4\pi}Exp\left[\frac{-j4\pi\cdot t}{To}\right]_0^{To/2}\right]$$ Al evaluar, Exp=0

$$C_1=\frac{Vm}{To\cdot 2j}\cdot\left[\frac{To}{2}-\frac{To}{-j4\pi}Exp\left[\frac{-j4\pi\cdot t}{To}\right]_0^{To/2}\right]$$

$$C_1=\frac{Vm}{4j}$$ 1 punto

3.3 Aproximación

$$Va(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Cn \cdot Exp\left[\frac{j2n\pi \cdot t}{T}\right]$$

$$Va(t) = Co + C1 \cdot Exp\left[\frac{j2\pi \cdot t}{To}\right]$$

$$Va(t) = \frac{Vm}{\pi} + \frac{Vm}{4j} \cdot Exp\left[\frac{j2\pi \cdot t}{To}\right]$$

Pero en funciones reales

$$Va(t) = Co + 2\,\mathrm{Re}\{C1\}\cos(\frac{2\pi \cdot t}{To}) - 2\,\mathrm{Im}\{C1\}sen(\frac{2\pi \cdot t}{To})$$

$$Va(t) = \frac{Vm}{\pi} + \frac{Vm}{2}sen(\frac{2\pi \cdot t}{To})$$ 1,5 puntos

3.4 Error Porcentual

$\sqrt{P}$: Medida para la amplitud de señales

$$\mathrm{E} = \frac{|V(t) - Va(t)|}{|V(t)|} = \sqrt{\frac{Pa}{P}}$$ 0,5 puntos

$$Pa = \frac{1}{T}\int_{To} |V(t) - Va(t)|^2 dt$$

$$Pa = \frac{1}{To}\int_{To}\sum_{K=-\infty}^{\infty} Ck \cdot Exp\left[\frac{j2k\pi \cdot t}{To}\right]\sum_{i=-\infty}^{\infty} C - i \cdot Exp\left[\frac{-j2i\pi \cdot t}{To}\right]dt \qquad k \neq -1,0,1 \quad i \neq -1,0,1$$

$$Pa = \frac{1}{To}\sum_{k=-\infty}^{\infty} Ck \sum_{i=-\infty}^{\infty} C - i\int_{0}^{To} Exp\left[\frac{j2(k-i)\pi \cdot t}{To}\right]dt$$

$$\int_{0}^{To} Exp\left[\frac{j2(k-i)\pi \cdot t}{To}\right] = \begin{cases} 0....i \neq k \\ To...i = k \end{cases}$$

$$Pa = \sum_{n=2}^{\infty} |Cn|^2$$ 0,5 puntos

De las misma forma

$$P = Co + \sum_{n=1}^{\infty} |Cn|^2$$

Por lo que

$$\mathrm{E} = \sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty} |Cn|^2}{Co + \sum_{n=1}^{\infty} |Cn|^2}}$$

Mejor aún:

$$\mathrm{E}[\%] = 100 \sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty} |Cn|^2}{Co + \sum_{n=1}^{\infty} |Cn|^2}}$$

0,5 puntos