Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Control 3

9 de Septiembre 2022

---

1. [**3 PUNTOS**] Considere la señal: $f(x) = \cos(4\pi|x|) + \frac{1}{2}\sin(6\pi x) + \frac{1}{3}\sin\left(2\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$

   a) Encuentre el período de $f(x)$

   Para comenzar consideramos que coseno es una función par por lo que tener valor absoluto o no no importa. También considero que un desfase de $\frac{\pi}{2}$ en un seno es un coseno. Luego:

   $$f(x) = \cos(4\pi x) + \frac{1}{2}\sin(6\pi x) + \frac{1}{3}\cos(2\pi x)$$

   Luego, sabemos que el período de la señal corresponderá al período de la fundamental. En este caso la sinusoide con menor frecuencia es $\frac{1}{3}\cos(2\pi x)$ y todos los otros son armónicos de la fundamental, por lo que el período de la función es 1.

   b) Encuentre una expresión en serie de Fourier $S_f(x)$ para $f(x)$

   La función $f(x)$ ya es una suma de sinusoides, por lo que ya es una serie de Fourier. De esta manera, tomando los coeficientes pares (factores que multiplican los cosenos):

   $$a_n = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } n = 1 \\ 1 & \text{si } xn = 0 \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

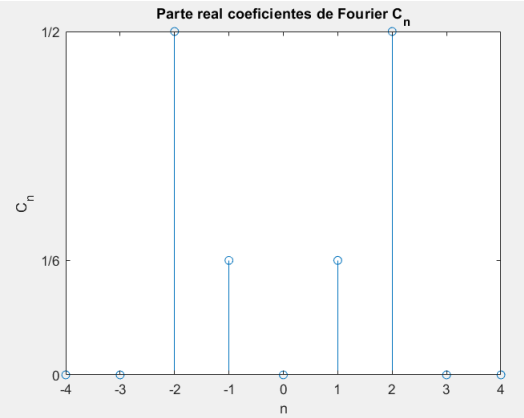
   Ahora los coeficientes impares (factores que multiplican los senos):

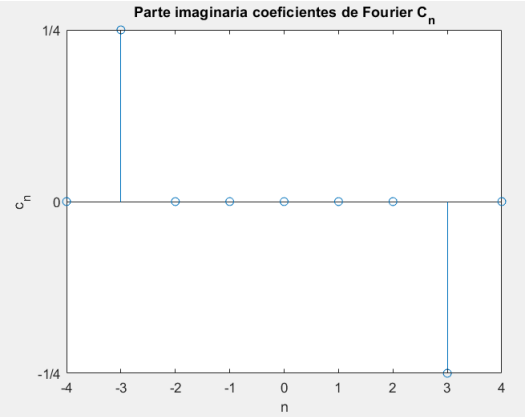
   $$b_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n = 3 \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

   Por otro lado, a partir de la expresión $c_n = \frac{a_n + ib_n}{2}$ se obtiene:

   $$c_n = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } n = \pm 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } xn = \pm 2 \\ \frac{-i}{4} & \text{si } xn = \pm 3 \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

c) Grafique los coeficientes de $S_f(x)$





2. [**3 PUNTOS**] Encuentre la transformada de Fourier de $\sqcap\left(\frac{x}{7}\right)$

Para resolver esto planteamos la transformada de Fourier como una integral:

$$\mathcal{F}\left\{\sqcap\left(\frac{x}{7}\right)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sqcap\left(\frac{x}{7}\right) e^{-i2\pi ux} dx$$

Sabemos que la función $\sqcap\left(\frac{x}{7}\right)$ es de la forma:

$$\sqcap\left(\frac{x}{7}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{7}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De esta forma podemos cambiar los límites de integración tal que:

$$\mathcal{F}\left\{\sqcap\left(\frac{x}{7}\right)\right\} = \int_{-7/2}^{7/2} e^{-i2\pi ux} dx$$

A continuación integramos:

$$\mathcal{F}\left\{\sqcap\left(\frac{x}{7}\right)\right\} = \left[\frac{-1}{i2\pi u} e^{-i2\pi ux}\right]_{-7/2}^{7/2}$$

A continuación, reemplezo en los límites de integración:

$$\mathcal{F}\left\{\sqcap\left(\frac{x}{7}\right)\right\} = \frac{e^{i\pi 7u}}{i2\pi u} - \frac{e^{-i\pi 7u}}{i2\pi u}$$

Re ajustando términos:

$$\mathcal{F}\left\{\sqcap\left(\frac{x}{7}\right)\right\} = \frac{1}{\pi u}\left[\frac{e^{i\pi 7u} - e^{-i\pi 7u}}{2i}\right]$$

Sabemos que el seno como exponencial compleja se escribe de la forma: $\sin(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2i}$, por lo que la expresión $\frac{e^{i\pi 7u}-e^{-i\pi 7u}}{2i}$ equivale a $\sin(7\pi u)$. Reemplazando:

$$\mathcal{F}\left\{\sqcap\left(\frac{x}{7}\right)\right\} = \frac{1}{\pi u}\sin(7\pi u)$$

Para terminar, sabemos que la función $\text{sinc}(x)$ se define como $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$, por lo que para transformar el resultado de la transformada en un sinc, multiplicamos por el uno conveniente $\frac{7}{7}$:

$$\mathcal{F}\left\{\sqcap\left(\frac{x}{7}\right)\right\} = \frac{7}{7\pi u}\sin(7\pi u)$$

De esta forma, aplicando la definición de sinc se obtiene:

$$\boxed{\mathcal{F}\left\{\sqcap\left(\tfrac{x}{7}\right)\right\} = 7\text{sinc}(7u)}$$

3. [**BONUS**] Encuentre una expresión en serie de Fourier para $f(x) = 3\cos^2(x)$

Para resolver esto, escribimos el coseno en su forma exponencial:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

A continuación, elevamos toda la igualdad al cuadrado:

$$\cos^2(x) = \frac{1}{4}\left[e^{2ix} + 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-2ix}\right]$$

Reescribiendo y multiplicando por 3:

$$3\cos^2(x) = \frac{3}{4}e^{2ix} + \frac{3}{2}e^{0} + \frac{3}{4}e^{-2ix}$$

Luego, observando la forma compleja de la serie, podemos expresar que $\cos^2(x)$ tiene solo 3 términos no nulos, asociando n a los exponentes de la exponencial tenemos:

$$n = -1 \rightarrow \frac{3}{4}e^{2ix} \qquad C_{-1} = \frac{3}{4}$$
$$n = 0 \rightarrow \frac{3}{2}e^{0} \qquad C_{0} = \frac{3}{2}$$
$$n = 1 \rightarrow \frac{3}{4}e^{-2ix} \qquad C_{1} = \frac{3}{4}$$