Prueba 4

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Escriba un problema en cada hoja. Debe colocar su nombre en todas las hojas. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. [6 ptos] Se tiene un dado de dudosa calidad donde la probabilidad de obtener n es $p[n]$ con $(n = 1...6)$. Las probabilidades de caras opuestas son iguales (las caras opuestas suman 7). Si se toma la DFT de esas probabilidades DFT$\{p[n]\}$ se tiene $P[k]$. También se sabe que Im$\{P[k]\} = 0$. ¿Cuáles son las probabilidades de cada cara?

   Resultado: Ya que las probabilidades de caras opuestas son iguales, tenemos $p[n] = (a,\ b,\ c,\ c,\ b,\ a)$. Por otro lado, la condición Im$\{P[k]\} = 0$ implica que las probabilidades son hermitianas, en este caso simétricas ya que son reales, es decir $b = a$ y $c = b$. De donde $a = b = c$, es decir las probabilidades son todas iguales a $1/6$, y el dado en realidad no está cargado.

2. [6 ptos] Encuentre explícitamente los términos de $F[k]$ para k par. $F[k]$ es la DFT de

$$f[n] = (a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h)$$

   Resultado: El término genérico es

$$8F[k] = a + be^{-i\pi k/4} + ce^{-i\pi k/2} + de^{-i\pi 3k/4} + ee^{-i\pi k} + fe^{-i\pi 5k/4} + ge^{-i\pi 3k/2} + he^{-i\pi 7k/4}$$

   y los términos pares son:

$$F[0] = \frac{1}{8}(a + b + c + d + e + f + g + h)$$

$$F[2] = \frac{1}{8}(a - bi - c + di + e - fi - g + hi)$$

$$F[4] = \frac{1}{8}(a - b + c - d + e - f + g - h)$$

$$F[6] = \frac{1}{8}(a + bi - c - di + e + fi - g - hi)$$

3. [6 ptos] En resonancia magnética se adquiere una señal que es la transformada de Fourier del objeto. La reconstrucción consiste en muestrear esa señal y tomarle la transformada discreta inversa para obtener el objeto. Sea $f(x)$ el objeto que interesa reconstruir. De la señal $F(u)$ se tomarán N muestras con espaciamiento U en forma simétrica respecto del origen. Es decir las muestras serán tomadas en las posiciones:

$$u_m = (\cdots - 5U/2,\ -3U/2,\ -U/2,\ U/2,\ 3U/2,\ 5U/2, \cdots)$$

   con $N/2$ muestras a cada lado del origen. Se forma el vector $F[k]$ ordenando las muestras:

$$F[k] = (F(U/2),\ F(3U/2),\ F(5U/2),\ \cdots,\ F(-5U/2),\ F(-3U/2),\ F(-U/2))$$

   y se toma la DFT de $F[k]$ para obtener $f[n]$. Suponiendo que $f(x) = 0$ para $|x| > 1/U$

(a) Encuentre $f[n]$ en función de $f(x)$. Puede ignorar factores de amplificación globales.

(b) Si $N = 128$, $U = 8/N$ y $f(x) = \wedge(x/5)$, grafique la magnitud y fase de $f[n]$.

Resultado:

(a) El muestreo se puede expresar con una función shah desplazada en $U/2$ y limitada al intervalo $(-NU/2,\ NU/2)$ que multiplicará $F(u)$

$$F_m(u) = \text{Ш}\left(\frac{u - U/2}{U}\right) \sqcap \left(\frac{u}{NU}\right) F(u)$$

con $F[k] = F_m(kU)$ (el signo igual significa "igual a la magnitud de ..."). $f[n]$ será el muestreo de $\mathcal{F}^{-1}\{F_m(u)\}$, es decir (con $x = nT$)

$$\begin{aligned} f[n] &= \text{Ш}(\frac{x}{T})\mathcal{F}^{-1}\{F_m(u)\} \\ &= \text{Ш}(\frac{x}{T})\mathcal{F}^{-1}\{\text{Ш}\left(\frac{u - U/2}{U}\right) \sqcap \left(\frac{u}{NU}\right) F(u)\} \\ &= \text{Ш}(\frac{x}{T})\left[\mathcal{F}^{-1}\{\text{Ш}\left(\frac{u - U/2}{U}\right)\} * \mathcal{F}^{-1}\{\sqcap\left(\frac{u}{NU}\right)\} * \mathcal{F}^{-1}\{F(u)\}\right] \\ &= \text{Ш}(\frac{x}{T})\left[e^{i2\pi x\frac{U}{2}}\,\text{Ш}\,(Ux) * \text{sinc}\,(NUx) * f(x)\right] \\ &= \text{Ш}(\frac{x}{T})\left[e^{i\pi\frac{x}{NT}}\,\text{Ш}\left(\frac{x}{NT}\right) * f(x)\right] \end{aligned}$$

Donde usamos

$$\text{Ш}(\frac{x}{T})\,\text{sinc}\,(NUx) = \text{Ш}(\frac{x}{T})\,\text{sinc}\,(\frac{x}{T}) = \delta[n]$$

Finalmente, usamos $f(x) = 0$ para $|x| > 1/NT$ por lo que, en el intervalo $(-NT/2,\ NT/2)$

$$\text{Ш}\left(\frac{x}{NT}\right) * f(x) = f(x)$$

Es decir

$$f[n] = \text{Ш}(\frac{x}{T})f(x)e^{i\pi\frac{x}{NT}}$$

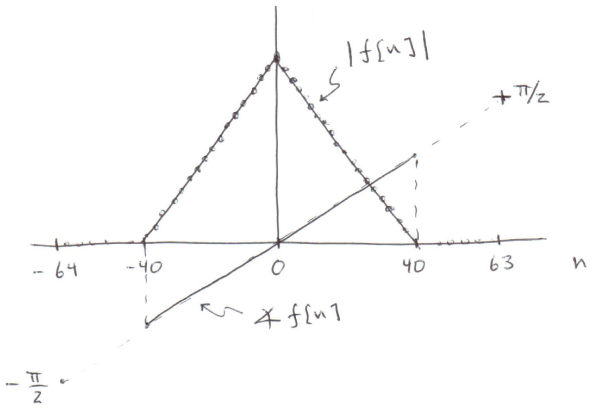
Vemos que $f[n]$ es una representación exacta de $f(x)$ excepto por una fase lineal.

(b) Si $f(x) = \wedge(x/5)$ tendremos

$$f[n] = \text{Ш}(\frac{x}{T}) \wedge (x/5)e^{i\pi\frac{x}{NT}}$$

Pero de $NUT = 1$ tenemos $T = 1/8$ y $NT = 16$,

$$\begin{aligned} f[n] &= \wedge(nT/5)e^{i\pi nT/16} \\ &= \wedge(n/40)e^{i\pi n/128} \end{aligned}$$



4. [6 ptos] Interesa filtrar con $h[n]$ la señal $x[n]$, es decir, encontrar $y[n] = x[n] *_l h[n]$. Los recursos computacionales son escasos y la señal $x[n]$ es muy larga, por lo que se necesita un algoritmo que lo haga por partes, separando la señal por tramos. El largo de $h[n]$ es M. Defina ese algoritmo considerando que cuenta con las siguientes rutinas computacionales. No existe una rutina para hacer convoluciones lineales, por lo que hay que emplear la convolución cíclica en el dominio de Fourier.

Rutina	Operación	Explicación
$F = \text{DFT}(f)$	$F[k] = \text{DFT}\{f[n]\}$	Calcula la DFT
$f = \text{IDFT}(F)$	$f[n] = \text{IDFT}\{F[k]\}$	Calcula la DFT inversa
$h = \text{MULT}(f, g)$	$g[n] = f[n]g[n]$	Multiplica dos secuencias de mismo largo
$g = \text{PAD}(f, N)$	$g[n] = (f[n],\ 0, \cdots)$	Acolcha la secuencia hasta un largo N
$g = \text{CUT}(f, p, L)$	$g[n] = f[n + pL]$	Extrae un tramo de largo L en pL
$g = \text{PUT}(g, f, p, L)$	$g[pL + n] = f[n]$	Coloca f, de largo L, en la posición pL
$g = \text{SUM}(g, f, N, p, L)$	$g[pL + n] = g[pL + n] + f[n]$	Suma f, de largo N, a g en la posición pL
$g = \text{INIT}(f)$	$g[n] = 0 \cdot f[n]$	Vector cero del mismo largo que f

Resultado: La señal se puede descomponer en segmentos de largo L, sea $x_p[n] = x[n+pL]$ para $n = 0...L-1$

$$x[n] = \sum_p x_p[n]$$

es decir, la convolución buscada es

$$y[n] = x[n] *_l h[n] = \sum_p x_p[n] *_l h[n] = \sum_p y_p[n]$$

donde $y_p[n] = x_p[n] *_l h[n]$ es de largo $L + M - 1$. Para calcular esta convolución lineal en base a una cíclica acolcharemos los vectores a $N = L + M - 1$ que es el mínimo largo que evita la aliasión. Entonces $y_p[n] = \hat{x}_p[n] * \hat{h}[n]$, donde $\hat{x}_p[n]$ es la versión acolchada de $x_p[n]$ y $\hat{h}[n]$ es la versión acolchada de $h[n]$.

La convolución cíclica la podemos calcular en el dominio de la frecuencia:

$$y_p[n] = \hat{x}_p[n] * \hat{h}[n] = \text{DFT}^{-1}\{\text{DFT}\{\hat{x}_p[n]\} \times \text{DFT}\{\hat{h}[n]\}\}$$

En resumen, el algorimo es

Choose $L > M$
$N = M + L - 1$
$h1 = \mathrm{PAD}(h, N)$
$H = \mathrm{DFT}(h1)$
$y = \mathrm{INIT}(x)$
For all p

$g = \mathrm{CUT}(x, p, L)$
$G = \mathrm{DFT}(g)$
$Y = \mathrm{MULT}(G, H)$
$y1 = \mathrm{IDFT}(Y)$
$y = \mathrm{SUM}(y, y1, N, p, L)$

End For