IEE2103 - SEÑALES Y SISTEMAS
Interrogación 2
Prof. Rodrigo F. Cádiz

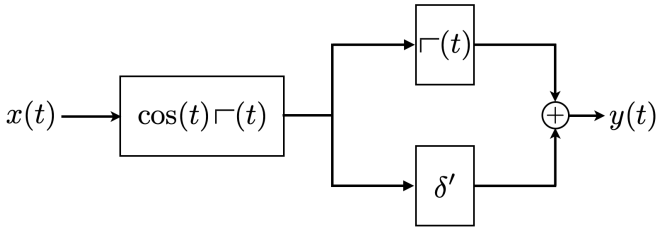
2do. semestre 2019
Tiempo: 1 hr. 20 min.
Puntos: 32
Fecha: 30/09/2019

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo dos carillas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre, rut, número de interrogación y número de pregunta en todas las hojas que ocupe. Las hojas sin esta información no serán corregidas.

---

1. (6 pts.) **Subsistemas.**

Considere el sistema compuesto por tres subsistemas, descrito por la siguiente figura, donde en cada caja se especifica la **respuesta al impulso** de cada subsistema.



δ es la distribución delta de Dirac y $\sqcap$ es el escalón.

(a) (5 pts.) Determine el sistema inverso del sistema completo

(b) (1 pto.) Determine la salida del sistema completo a la entrada $x(t) = e^{-3t} + \cosh(3t) + \text{sen}^3(3t)$.

Solución

(a) Recordando que si dos sistemas estan en serie sus respuestas al impulso se convolucionan y si están en paralelo se suman, entonces el sistema se representa por la respuesta al impulso h dada por:

$$h = (\cos \sqcap) * (\sqcap + \delta') \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

La notación anterior explicita que el sistema debe estudiarse en el ámbito de las distribuciones, dado que hay impulsos involucrados. Tomando la Transformada de Laplace bi-lateral, y usando la propiedad de la convolución, tenemos

$$H(s) = \mathcal{L}\{\cos \sqcap\}(s)\,(\mathcal{L}\{\sqcap\}(s) + \mathcal{L}\{\delta'\}(s)) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Es decir

La pregunta 1 continúa en la página siguiente ...

$$H(s) = \frac{s}{s^2+1}\left(\frac{1}{s}+s\right) = \frac{s}{s^2+1}\frac{1+s^2}{s} = 1 \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Lo que implica que $h = \delta$, es decir el sistema no hace prácticamente nada, ya que convoluciona la entrada con un delta. Es obvio que el sistema inverso es el mismo sistema, es decir $h = \delta$ $\rightarrow$ **1 pt.**

(b) Si la entrada es $x(t) = e^{-3t} + \cosh(3t) + \text{sen}^3(3t)$, la salida es simplemente

$$y(t) = (e^{-3t} + \cosh(3t) + \text{sen}^3(3t)) * \delta = e^{-3t} + \cosh(3t) + \text{sen}^3(3t) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

NOTA: La anterior solución muestra el poder de la Transformada de Laplace. El problema también puede ser resuelto en el dominio del tiempo, usando las propiedades de la convolución, del impulso y la derivada, de la siguiente manera:

$$h = (\cos \sqsubset) * (\sqsubset + \delta') = (\cos \sqsubset) * \sqsubset + (\cos \sqsubset) * \delta'$$

Primero notamos que

$$(\sin \sqsubset)' = \sin' \sqsubset + \sin \sqsubset' = \cos \sqsubset + \sin \delta = \cos \sqsubset + \sin(0)\delta = \cos \sqsubset$$

Usando el resultado anterior y la propiedad de la derivada de la convolución, tenemos:

$$h = (\sin \sqsubset)' * \sqsubset + (\cos \sqsubset)' * \delta$$

$$h = (\sin \sqsubset) * \sqsubset' + (\cos \sqsubset)'$$

$$h = (\sin \sqsubset) * \delta + \cos' \sqsubset + \cos \sqsubset'$$

$$h = \sin \sqsubset - \sin \sqsubset + \cos \delta$$

Por lo que

$$h = \cos \delta = \cos(0)\delta = 1\delta = \delta$$

Concluímos igualmente que la respuesta al impulso del sistema total es un impulso.

2. (8 pts.) **Integrales**.

(a) (4 pts.) Calcule la integral

$$\int_0^\infty x e^{-2x} \cos(x) dx$$

(b) (4 pts.) Calcule la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$$

La pregunta 2 continúa en la página siguiente ...

Solución

(a) Usando las propiedades de la Transformada unilateral de Laplace y partiendo del par

$$\cos(x) \rightarrow \frac{s}{s^2+1} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Sabemos que al multiplicar por x en el dominio del espacio derivamos una vez en el dominio de Laplace, es decir

$$x\cos(x) \rightarrow -\frac{d}{ds}\{\frac{s}{s^2+1}\} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

La integral pedida es simplemente la Transformada de Laplace evaluada en $s=2$, es decir

$$\frac{2^2-1}{(2^2+1)^2} = \frac{4-1}{(4+1)^2} = \frac{3}{25} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(b) Notamos que

$$\frac{\sin^2(x)}{x^2} = \text{sinc}^2(\frac{x}{\pi}) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

La integral pedida es simplemente la Transformada de Fourier de $\text{sinc}^2(x/\pi)$ evaluada en 0. Usando las propiedades de la Transformada de Fourier:

$$\text{sinc}^2(x) \rightarrow \wedge(u) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

$$\text{sinc}^2(\frac{x}{\pi}) \rightarrow |\pi| \wedge (\pi u) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Evaluando en $u=0$ notamos que este triángulo tiene altura π, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \pi \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

3. (6 pts.) **Forma integral**.

Considere el siguiente sistema:

$$g(x) + A\left(g(x-1) + g(x+1)\right) = f(x)$$

donde la entrada $f(x)$ es una función continua, absolutamente integrable sobre $\mathbb{R}$ y A es una constante. Suponga que la Transformada de Fourier de la función de salida $g(x)$ existe y su inversa también.

(a) (4 pts.) Determine una forma integral para $g(x)$, esto es, exprese $g(x)$ como una integral.

(b) (2 pts.) Determine las condiciones que debe cumplir A para que la forma integral de la parte (a) sea válida.

La pregunta 3 continúa en la página siguiente ...

Solución

(a) Como $f(x)$ es continua e integrable, tiene Transformada de Fourier $F(u)$ → **1 pt.** Entonces, tomando Transformada de Fourier a ambos lados de la ecuación y aplicando la propiedad del desplazamiento:

$$G(u) + A(e^{-i2\pi u}G(u) + e^{i2\pi u}G(u)) = F(u) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Agrupando,

$$G(u)(1 + A2\cos(2\pi u)) = F(u)$$

es decir,

$$G(u) = \frac{F(u)}{1 + 2A\cos(2\pi u)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Tomando la Transformada inversa, que existe de acuerdo al enunciado, obtenemos la forma integral pedida:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(u)}{1 + 2A\cos(2\pi u)} e^{i2\pi ux} du \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(b) Para que la integral anterior exista, el denominador no debe indefinirse, es decir

$$1 + 2A\cos(2\pi u) \neq 0 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

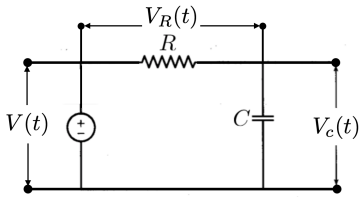
lo que implica

$$|A| < \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

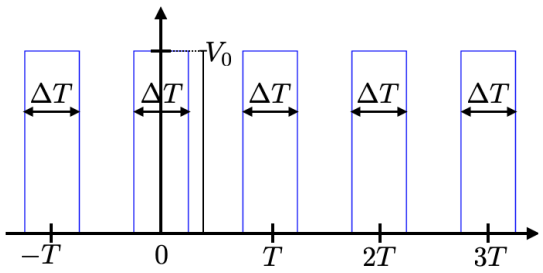
tal que el coseno nunca alcance el valor -1.

4. (12 pts.) **Circuito RC**.

Considere el circuito eléctrico RC de la figura (a), inicialmente en reposo, con condiciones iniciales nulas.



(a) Circuito RC



(b) Tren de pulsos

Este circuito está determinado por la siguiente ecuación diferencial:

La pregunta 4 continúa en la página siguiente ...

$$\frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{V_C(t)}{RC} = \frac{V(t)}{RC}$$

donde $V(t)$ es el voltaje de entrada, y $V_C(t)$, el voltaje en el condensador, es la salida. R es el valor de la resistencia y C de la capacitancia, ambos valores constantes.

(a) (2 pts.) Determine qué tipo de filtro es el sistema (pasa bajos, pasa banda, pasa altos, etc.) y el orden del filtro.

(b) (4 pts.) Suponga que la entrada $V(t)$ es una señal de tren de pulsos periódica, de período T, con pulsos de ancho ΔT, y amplitud V_0, como lo indica la figura (b). Determine su representación en series de Fourier.

(c) (2 pts.) Determine la relación de los coeficientes de la Serie de Fourier de la salida $V_c(t)$, con los coeficientes de la entrada $V(t)$.

(d) (2 pts.) Si la entrada $V(t)$ fuera un impulso, ¿cual sería la salida?

(e) (2 pts.) Si la salida fuera ahora el voltaje en la resistencia $V_R(t)$, determine qué tipo de filtro representaría el nuevo sistema.

Solución

(a) Tomando Transformada de Laplace de la ecuación diferencial:

$$\mathcal{L}\{\frac{dV_C}{dt}\} + \mathcal{L}\{\frac{V_C}{RC}\} = \mathcal{L}\{\frac{V}{RC}\}$$

$$sV_C(s) + \frac{1}{RC}V_C(s) = (s + \frac{1}{RC})V_C(s) = \frac{V(s)}{RC}$$

Por lo que la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{1}{RC(s + \frac{1}{RC})} = \frac{1}{sRC + 1}$$

Vemos que la función de transferencia consta de un solo polo en $s = -\frac{1}{RC}$, por lo tanto es un filtro pasa bajos → **1 pt.** de primer orden → **1 pt.**

(b) Los coeficientes de la Serie de Fourier en su versión compleja están dados por:

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T V(t)e^{-i2\pi kt/T}dt = \frac{1}{T}\int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} V_0 e^{-i2\pi kt/T}dt = \frac{V_0}{T}\int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} e^{-i2\pi kt/T}dt \rightarrow$$ **1 pt.**

Es decir

$$c_k = \frac{V_0}{T}\frac{1}{-i2\pi k/T}e^{-i2\pi kt/T}\Big|_{t=-\Delta T/2}^{t=\Delta T/2} \rightarrow$$ **1 pt.**

$$c_k = \frac{V_0}{T}\frac{T}{-i2\pi k}\left(e^{-i2\pi k\Delta T/2T} - e^{-i2\pi k - \Delta T/2T}\right)$$

La pregunta 4 continúa en la página siguiente ...

$$c_k = \frac{V_0}{-i2\pi k}\left(e^{-i\pi k\Delta T/T} - e^{i\pi k\Delta T/T}\right) = \frac{V_0}{\pi k}\left(\frac{e^{i\pi k\Delta T/T} - e^{-i\pi k\Delta T/T}}{2i}\right)$$

$$c_k = V_0\frac{\sin(\pi k\Delta T/T)}{\pi k} = \frac{V_0\Delta T}{T}\text{sinc}\left(\frac{k\Delta T}{T}\right) \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

(c) La respuesta de frecuencia la obtenemos al evaluar la función de transferencia en $s = i2\pi u$, es decir:

$$H(u) = \frac{1}{i2\pi uRC + 1}$$

Dado que las exponenciales complejas son autofunciones de los sistemas LTI, esto implica que los coeficientes de la Serie de Fourier de la entrada c_k y de la salida $\hat{c_k}$ estarán relacionados mediante la respuesta de frecuencia $H(u)$, evaluada en cada frecuencia k, es decir

$$\hat{c_k} = \frac{c_k}{i2\pi kRC + 1} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

En este caso particular, entonces tenemos:

$$\hat{c_k} = \frac{V_0\frac{\sin(\pi k\Delta T/T)}{\pi k}}{i2\pi kRC + 1}$$

(d) Tomando la transformada inversa de Laplace de $H(s)$ es simple determinar que la respuesta al impulso es

$$h_c(t) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\sqcap(t) \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

(e) Dado que el circuito tiene una fuente de entrada y dos elementos conectados en serie, si el voltaje en el condensador es el voltaje de entrada con las frecuencias altas atenuadas, entonces el voltaje en la resistencia tiene que ser el voltaje de entrada con las frecuencias bajas atenuadas $\rightarrow$ **1 pt.** Es decir, este nuevo sistema se comporta como un filtro pasa altos $\rightarrow$ **1 pt.**