Examen

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo nueve hojas de apuntes (tres correspondientes a cada interrogación).
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre en todas las hojas que ocupe. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. (5 pts.) Para un circuito resonante, se define la frecuencia resonante como aquella frecuencia en que el módulo de la función de transferencia es máxima. Determine la o las frecuencias resonantes de un circuito RLC paralelo descrito por la siguiente función de transferencia:

$$H(u) = \frac{1}{R + i2\pi uL + \frac{1}{i2\pi uC}}$$

Solución:

Tenemos que:

$$H\left(u\right) = \frac{1}{R + i\left(2\pi uL - \frac{1}{2\pi uC}\right)}$$

Entonces,

$$\left|H\left(u\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi uL - \frac{1}{2\pi uC}\right)^2}} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Luego, $H\left(u\right)$ se maximiza cuando la segunda expresión cuadrática es cero, i.e.

$$2\pi uL = \frac{1}{2\pi uC} \rightarrow \left(2\pi u\right)^2 LC = 1$$

Resolviendo:

$$2\pi u = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow \boxed{u = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}} \rightarrow \boxed{\textbf{3 pts.}}$$

lo cual también pudo haber sido resuelto mediante derivación e igualación a cero, pero hubiese resultado mucho más engorroso.

Nota: Sin importar el método, mientras se llegase al resultado correcto se obtenía la totalidad del puntaje.

2. (5 pts.) Considere el sistema discreto $f[n] \rightarrow g[n]$, donde

$$g[n] = \text{mediana}\{f_{n-k}, \ldots, f_n, \ldots f_{n+k}\}$$

(a) ¿Es el sistema invariante?

(b) ¿Es posible caracterizar completamente el sistema a partir de su respuesta al impulso?

Solución:

(a) El sistema es inviariante, porque

$$f[n] \to \text{mediana}\{f_{n-k}, \ldots, f_n, \ldots, f_{n+k}\} = g[n]$$

$$f[n-l] \to \text{mediana}\{f_{n-k-l}, \ldots, f_{n-l}, \ldots, f_{n+k-l}\} = g[n-l] \to \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

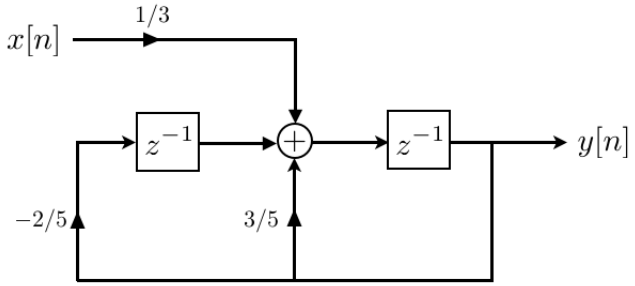
(b) Para que fuera posible caracterizar completamente el sistema a partir de su respuesta al impulso, el sistema, además de invariante, debiera ser lineal, pero no lo es, por lo tanto no se puede caracterizar únicamente mediante su respuesta al impulso $\to$ **1 pts.**. La prueba de que el sistema no es lineal puede hacerse mediante un contra ejemplo $\to$ **2 pts.**:
Sean $f_1[n] = \{1, 0, 0\}$ y $f_2[n] = \{0, 1, 2\}$. Entonces,

$$f_1[n] \to g_1[n] = 0$$

$$f_2[n] \to g_2[n] = 1$$

$$3f_1[n] + f_2[n] \to 2 \neq 3g_1[n] + g_2[n] = 1$$

3. (5 pts.) Considere el siguiente sistema LTI descrito por el diagrama de bloques de la figura.



(a) Escriba la ecuación de diferencias del sistema.

(b) Utilice la salida de los retrasos para determinar una representación en variables de estado.

Solución:

(a)

$$y[n] - \frac{3}{5}y[n-1] + \frac{2}{5}y[n-2] = \frac{1}{3}x[n-1] \to \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(b)

$$v_1[n] = y[n] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

$$v_1[n+1] = \frac{3}{5}v_1[n] + v_2[n] + \frac{1}{3}x[n] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

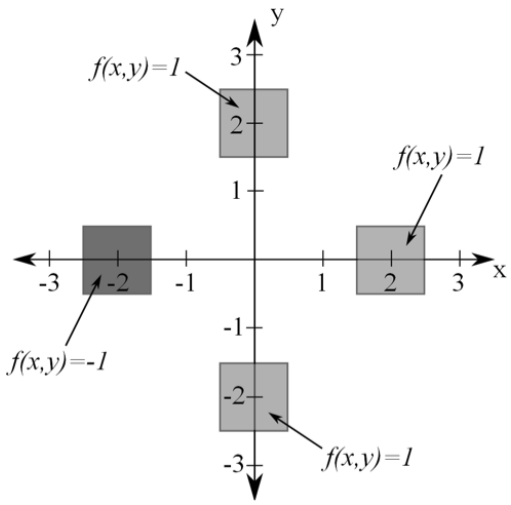
$$v_2[n+1] = -\frac{2}{5}v_1[n] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

En forma matricial, $\rightarrow$ **1 pts.**

$$\mathbf{v}[n+1] = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 1 \\ -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}[n] + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} x[n]$$

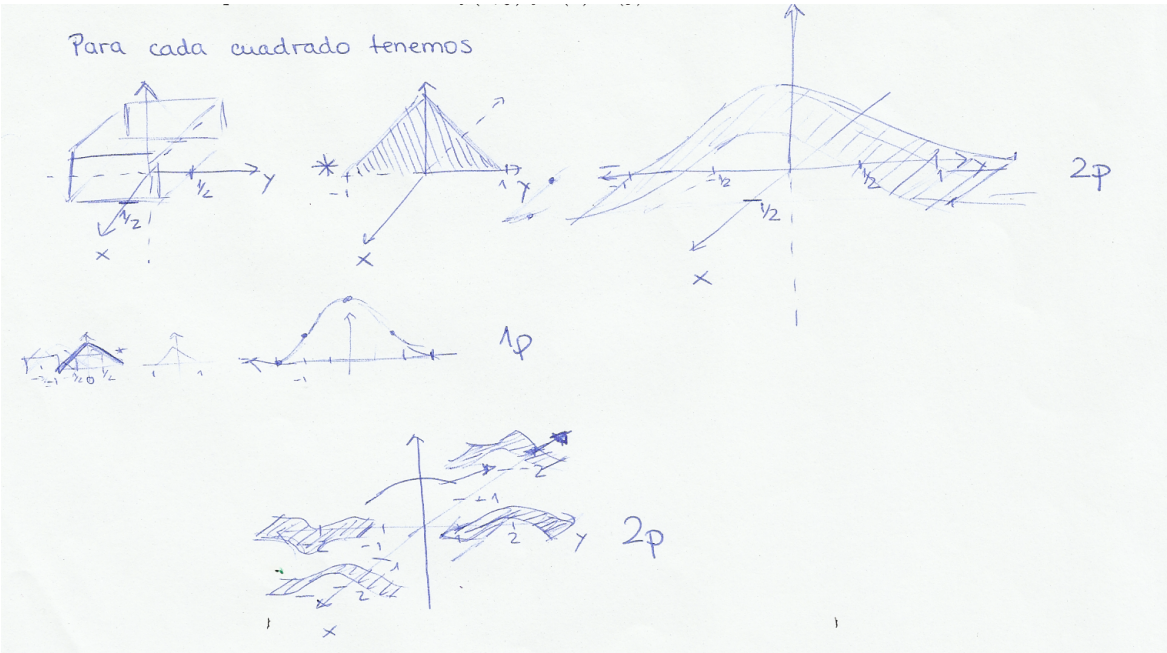
$$\mathbf{y}[n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}[n] + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} x[n]$$

4. (5 pts.) Una función $f(x, y)$ está definida como se muestra en la figura. La función vale 0 excepto en cuatro cuadrados unitarios, donde su valor es 1 en tres casos y -1 en el cuarto caso.



Grafique la convolución entre $f(x, y)$ y $\delta(x) \wedge (y)$.

Solución:



5. (5 pts.) Calcule la transformada de Fourier de la función de error erf, definida como:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Solución:

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2} dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-t^2} dt$$

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \sqcap(x-t) dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2}$$

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} * \sqcap(x) dt - 1$$

$$\mathcal{F}\{\text{erf}(x)\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \mathcal{F}\{e^{-x^2}\} \left(\frac{-i}{2\pi u} + \frac{\delta(u)}{2}\right) - \delta(u)$$

$$\boxed{\mathcal{F}\{\text{erf}(x)\} = e^{-\pi^2 u^2} \left(\frac{-i}{\pi u} + \delta(u)\right) - \delta(u)}$$

6. (5 pts.) Calcule la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(3x+5)dx$$

Solución:

Sabemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 du \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

$$f(x) = \text{sinc}^2(3(x+5/3))$$

$$F(u) = \frac{1}{3} \sqcap (\frac{u}{3}) e^{i2\pi u 5/3}$$

$$|F(u)|^2 = \frac{1}{9} \sqcap (\frac{u}{3}) \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(3x+5)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{9} \sqcap (\frac{u}{3}) = \frac{1}{9} \int_{-3/2}^{3/2} du = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3}} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

7. (5 pts.) Considere la señal

$$f(t) = \left(\frac{\text{sen}\, 50\pi t}{\pi t} \right)^2$$

Se desea muestrear esta señal con una frecuencia de muestreo $\omega_s = 150\pi$ para obtener una señal $g(t)$ con transformada de Fourier $G(\omega)$. Determine el máximo valor de ω_0 con el cual se garantiza que

$$G(\omega) = 75F(\omega)$$

para $|\omega| \leq \omega_0$, donde $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de $f(t)$.

Solución:

$$f(t) = 50^2 \,\text{sinc}\,(50t)$$

$$F(\omega) = 50^2 \frac{1}{50} \wedge (\frac{\omega}{2\pi 50})$$

$$\boxed{F(\omega) = 50 \wedge (\frac{\omega}{100\pi})} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

El período de muestreo es

$$T = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{2\pi}{150\pi} = \frac{1}{75} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Al muestrear la señal, ésta se amplifica por una cantidad inversa al período, por lo tanto es claro que $G(\omega) = 75F(\omega)$. Pero, como hay aliasión, lo anterior se cumple solamente si no hay traslape, es decir si $\omega \leq 50\pi$, es decir $\boxed{\omega_0 = 50\pi} \rightarrow$ **2 pts.**.

8. (5 pts.) Considere un sistema LTI discreto cuya respuesta de frecuencia es

$$H(e^{i\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \frac{\pi}{8} \\ 0, & \frac{\pi}{8} < |\omega| < \pi \end{cases}$$

Muestre que si la entrada $f[n]$ a este sistema tiene período $N = 3$, la salida $g[n]$ tiene sólo un coeficiente de serie de Fourier distinto de cero por período.

Solución:

Sean a_k los coeficientes de $f[n]$, entonces los coeficientes b_k de la salida cumplen con

$$\boxed{b_k = a_k H(e^{ik\omega_0})} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Además, $\omega_0 = \frac{2\pi}{3} \rightarrow$ **1 pts.**.

En el rango $0 \leq k \leq 2$, $\boxed{H(e^{ik\omega_0}) = 0, \text{para } k = 1, 2} \rightarrow$ **2 pts.**.

Por lo tanto, solo $b_0 \neq 0$, en el rango $0 \leq k \leq 2 \rightarrow$ **1 pts.**.

9. (5 pts.) La Transformada de Laplace $F(s)$ de una señal $f(t)$ tiene cuatro polos y un número desconocido de ceros. Se sabe que $f(t)$ tiene un impulso en $t = 0$. ¿Qué se puede inferir acerca del número de ceros y sus ubicaciones?

Solución:

Como $f(t)$ tiene un impulso en $t = 0$, el numerador debe tener mayor o igual grado que el denominador $\rightarrow$ **3 pts.**, por lo tanto $F(s)$ tiene al menos cuatro ceros $\rightarrow$ **1 pts.**. Las ubicaciones de los ceros dependen de la forma completa de $f(t) \rightarrow$ **1 pts.**.

10. (5 pts.) La función de transferencia de un sistema LTI causal es

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 2}$$

Determine la respuesta del sistema a la entrada $f(t) = e^{-|t|}$, $-\infty < t < \infty$.

Solución:

$$f(t) = e^{-|t|} = e^{-t}\sqcap(t) + e^{t}\sqcap(-t)$$

$$F(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1} = \frac{-2}{(s+1)(s-1)}, \quad -1 < \Re\{s\} < 1 \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Como $h(t)$ es causal la ROC de $H(s)$ es $-1 < \Re\{s\} < 1$, dado que tiene polos es $-1 \pm i$. Entonces,

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{-2}{(s^2+2s+2)(s-1)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

con ROC $-1 < \Re\{s\} < 1$.

Expandiendo en fracciones parciales

$$Y(s) = \frac{-2}{5}\frac{1}{s-1} + \frac{2}{5}\frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{4}{5}\frac{1}{(s+1)^2+1}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{y(t) = \frac{2}{5}e^{t}\sqcap(-t) + \frac{2}{5}e^{-t}\cos t\sqcap(t) + \frac{4}{5}e^{-t}\operatorname{sen} t\sqcap(t)} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

11. (5 pts.) Si $f[n] = (\underline{a}\ 0\ b\ 0\ c\ 0\ d\ 0\ )$ tiene DFT

$$F[k] = (A\ B\ C\ D\ E\ F\ G\ H\ )$$

Entonces, ¿cuál es la DFT de $(\underline{d}\ c\ b\ a\ )$?

Solución:

Aplicamos sistemáticamente las propiedades. Tenemos que si:

$$(\ \underline{a}\quad b\quad c\quad d\ ) \longrightarrow (\alpha\quad \beta\quad \gamma\quad \delta) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

entonces:

$$(\underline{a}\quad d\quad b\quad c) \longrightarrow (\alpha\quad \delta\quad \beta\quad \gamma) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

y por lo tanto,

$$(\underline{d}\quad c\quad b\quad a) \longrightarrow (\alpha\quad i\delta\quad -\beta\quad -i\gamma) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Luego, de la propiedad del estiramiento,

$$\begin{aligned} \alpha &= A/2 = E/2 \\ \beta &= B/2 = F/2 \\ \gamma &= C/2 = G/2 \\ \delta &= D/2 = H/2 \end{aligned}$$

Es decir,

$$(\underline{d}\quad c\quad b\quad a) \longrightarrow \frac{1}{2}(A\quad iD\quad -B\quad -iF) \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

12. (5 pts.) Se sabe lo siguiente acerca de un sistema LTI discreto con entrada $f[n]$ y salida $g[n]$:

    (a) Si $f[n] = (-2)^n$ para toda n, entonces $g[n] = 0$ para toda n.

(b) Si $f[n] = (1/2)^n \sqcap[n]$ para toda n, entonces $g[n]$ para toda n es de la forma

$$g[n] = \delta[n] + a\left(\frac{1}{4}\right)^n \sqcap[n]$$

donde a es una constante.

(a) Determine el valor de la constante a.

(b) Determine la respuesta $g[n]$ si la entrada $f[n]$ es $f[n] = 1$ para toda n.

Solución:

(a) En un sistema LTI se tiene que $z^n \rightarrow H(z)z^n$, por lo que según (a) $H(-2) = 0 \rightarrow$ **2 pts.** De acuerdo a (b),

$$F(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

y

$$G(z) = 1 + \frac{a}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{4}$$

Entonces,

$$H(z) = \frac{(1 + a - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{4} \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

Reemplazando $z = -2$ en la ecuación anterior, permite determinar que $a = -\frac{9}{8} \rightarrow$ **2 pts.**.

(b) En este caso tenemos que $g[n] = H(1)f[n]$, lo que implica que

$$g[n] = H(1) = \frac{1}{4} \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

13. (5 pts.) Encuentre $f[n]$ si

$$F(z) = \ln(1 - z^{-1}), \quad |z| > 1/2$$

Solución:

$$F(z) = \ln(1 - \frac{1}{z}) = \ln(\frac{z-1}{z}) = \ln(z-1) - \ln(z)$$

Expresando como integral

$$F(z) = \int (\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z})dz \rightarrow \textbf{2 pts.}$$

Derivando

$$-z\frac{dF(z)}{dz} = 1 + \frac{z}{z-1} = 1 - \frac{1}{1-z^{-1}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Entonces

$$nf[n] = \delta[n] - \sqcap[n] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

$$f[n] = \frac{\delta[n] - \sqcap[n]}{n} = -\frac{\sqcap[n-1]}{n} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

14. (5 pts.) Dibuje o explique brevemente la diferencia entre realizar un análisis multiresolución de tiempo-frecuencia mediante la STFT (Short-Time Fourier Transform) y mediante la Transformada Wavelet.

Solución:

La principal diferencia radica en la forma en que dividen el espacio tiempo frecuencia:

