IEE2103 - SEÑALES Y SISTEMAS

Interrogación 1

Prof. Rodrigo F. Cádiz

2do. semestre 2019
Tiempo: 1 hr. 20 min.
Puntos: 32
Fecha: 26/08/2019

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo dos carillas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre, rut, número de interrogación y número de pregunta en todas las hojas que ocupe. Las hojas sin esta información no serán corregidas.

---

1. (8 pts.) **Sistemas**

   (a) (3 pts.) Considere el sistema

   $$y(t) = x(t - \tau)$$

   donde $y(t)$ es la salida, $x(t)$ la entrada y $\tau \in \mathbb{R}$.

   Determine si el sistema es invertible. En caso positivo, explicite cual sería el sistema inverso. En caso negativo, demuestre que el sistema no es invertible.

   (b) (5 pts.) Considere el sistema

   $$y(t) = x(t)\cos(2\pi u t)$$

   donde $y(t)$ es la salida, $x(t)$ la entrada y $u \in \mathbb{R}$.

   i. (1 pt.) Determine si el sistema es estable.
   ii. (1 pt.) Determine si el sistema tiene memoria.
   iii. (1 pt.) Determine si el sistema es lineal.
   iv. (1 pt.) Determine si el sistema es invariante.
   v. (1 pt.) Determine si el sistema es causal.

Solución

(a) Observando que el sistema todo lo que hace es desplazar la señal de entrada en una cantidad τ hacia la derecha, el sistema inverso tiene que ser aquel que desplaza la señal la misma cantidad hacia la izquierda → **1 pt.** y vuelve a centrar la entrada en su posición original, es decir

$$y^{-1}(t) = x(t + \tau) \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

Por lo tanto el sistema es invertible → **1 pt.** Esta es la respuesta corta e intuitiva.

La pregunta 1 continúa en la página siguiente ...

La respuesta formal, es la siguiente. Observamos que el sistema se puede describir por la convolución $y = x * \delta_\tau$, donde δ_τ denota un impulso desfasado en τ. Deducimos entonces que la respuesta al impulso del sistema es

$$h = \delta_\tau \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Para que el sistema sea invertible, tiene que cumplirse $h * h^{-1} = \delta$. Usando las propiedaes de la convolución del impulso, entonces queda claro que:

$$h^{-1} = \delta_{-\tau} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

dado que

$$\delta_\tau * \delta_{-\tau} = \delta$$

Entonces concluímos que

$$\boxed{y^{-1}(t) = x(t+\tau)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(b) i. Si la entrada $x(t)$ es acotada, como $|\cos(2\pi ut)| \leq 1$ entonces la salida estará acotada, como máximo, al mismo valor de la entrada. Por lo tanto el sistema es estable $\rightarrow$ **1 pt.**

ii. Dado que $y(t)$ solo depende del valor presente de t, el sistema no tiene memoria $\rightarrow$ **1 pt.**

iii. Homogeneidad:

$$\alpha x(t) \rightarrow \alpha x(t)\cos(2\pi ut) = \alpha y(t)$$

Superposición:

$$x_1(t)+x_2(t) \rightarrow (x_1(t)+x_2(t))\cos(2\pi ut) = x_1(t)\cos(2\pi ut)+x_2(t)\cos(2\pi ut) = y_1(t)+y_2(t)$$

Por lo tanto, el sistema es lineal $\rightarrow$ **1 pt.**

iv. Invariancia:

$$x(t-\tau) \rightarrow x(t-\tau)\cos(2\pi ut)$$

Pero la salida desfasada es

$$y(t-\tau) = x(t-\tau)\cos(2\pi u(t-\tau))$$

Como ambas expresiones no son iguales, el sistema es variante $\rightarrow$ **1 pt.**

v. Como el sistema no depende de valores futuros de la entrada el sistema es causal $\rightarrow$ **1 pt.**

Por ejemplo, para el tiempo $t = 1$, entonces
$y(1) = x(1)\cos(2\pi u1)$.

2. (8 pts.) **Producto interno**.

Sean $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Se define el producto interno como

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g^*(\xi) d\xi$$

donde $g^*(x)$ denota al complejo conjugado de $g(x)$.

Determine lo siguiente:

(a) (2 pts.) ¿Qué sucede con el producto interno cuando f y g se desplazan en la misma cantidad?

(b) (2 pts.) ¿Qué sucede con el producto interno cuando f y g se desplazan en cantidades distintas?

(c) (2 pts.) ¿Qué sucede con el producto interno cuando f y g se escalan en la misma proporción?

(d) (2 pts.) ¿Qué sucede con el producto interno cuando f y g se escalan en distinta proporción?

Por si hubiese alguna confusión, desplazar es $x \to x - \tau$ y escalar es $x \to ax$, con $\tau, a > 0$.

Solución

Usaremos la notación $f_a = f(x - a)$ y $\partial_a f = f(ax)$.

(a) Supongamos que ambas funciones se desplazan en $a > 0$. Entonces

$$(f_a, g_a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi - a) g^*(\xi - a) d\xi \to \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Haciendo el cambio de variable $u = \xi - a$, $du = d\xi$.

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g^*(u) du = (f, g) \to \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Concluimos que el producto interno no se altera ante un desplazamiento equivalente en ambas funciones.

(b) Ahora tenemos

$$(f_a, g_b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi - a) g^*(\xi - b) d\xi \to \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Haciendo el cambio de variable $u = \xi - a$, $du = d\xi$.

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g^*(u + a - b) du = (f, g_{b-a}) \neq (f, g) \to \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Concluimos que el producto interno si se altera ante un desplazamiento distinto en ambas funciones.

(c) Supongamos entonces que ambas funciones se escalan en $a > 0$. Entonces

$$(\partial_a f, \partial_a g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a\xi) g^*(a\xi) d\xi \to \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Haciendo el cambio de variable $u = a\xi$, $du = ad\xi$.

La pregunta 2 continúa en la página siguiente ...

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g^*(u)\frac{du}{|a|} = \frac{1}{|a|}(f,g) \neq (f,g) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Concluimos que el producto interno se amplifica por un factor de $1/|a|$.

(d) Ahora tenemos

$$(\partial_a f, \partial_b g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a\xi)g^*(b\xi)d\xi \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Haciendo el mismo cambio de variables anterior $u = a\xi$, $du = ad\xi$.

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g^*(\frac{bu}{a})\frac{du}{|a|} = (f, \partial_{b/a} g) \neq (f,g) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Concluimos que el producto interno si se altera ante un escalamiento distinto en ambas funciones.

3. (8 pts.) **Correlación**.

Sean $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se define la correlación cruzada, o más simplemente, la correlación de f con g como :

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x+\xi)d\xi$$

En el caso en que $g = f$, entonces se denomina autocorrelación.

(a) (2 pts.) Encuentre $\sqcap(x/a) \star \sqcap(x/b)$, con $a, b > 0$.

(b) (2 pts.) Encuentre $\wedge(x) \sqcap (x - 1/2) \star \sqcap(x)$.

(c) (4 pts.) Demuestre que $(f \star f)(x) \leq (f \star f)(0)$

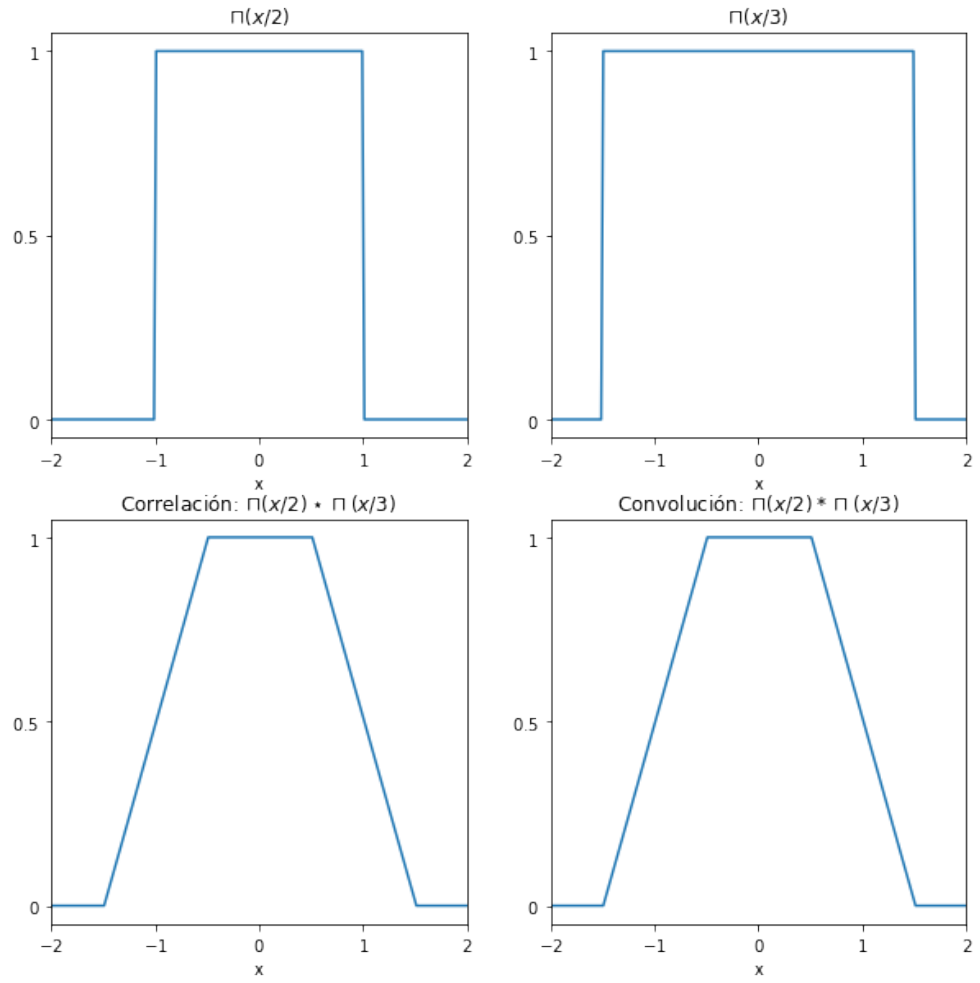
HINT: Para la tercera parte, utilice la desigualdad de Cauchy-Schwarz, que dice que:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(\xi)d\xi\right)^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)^2 d\xi \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)^2 d\xi$$

Solución

(a) Dado que la función $\sqcap$ es par, en este caso la autocorrelación y la convolución coinciden $\rightarrow$ **1 pt.** Entonces, en este caso, como los anchos de ambas funciones son distintos, la operación da un trapecio, como el de la figura, donde se muestra el caso $\sqcap(x/2) \star \sqcap(x/3)$.

La pregunta 3 continúa en la página siguiente ...



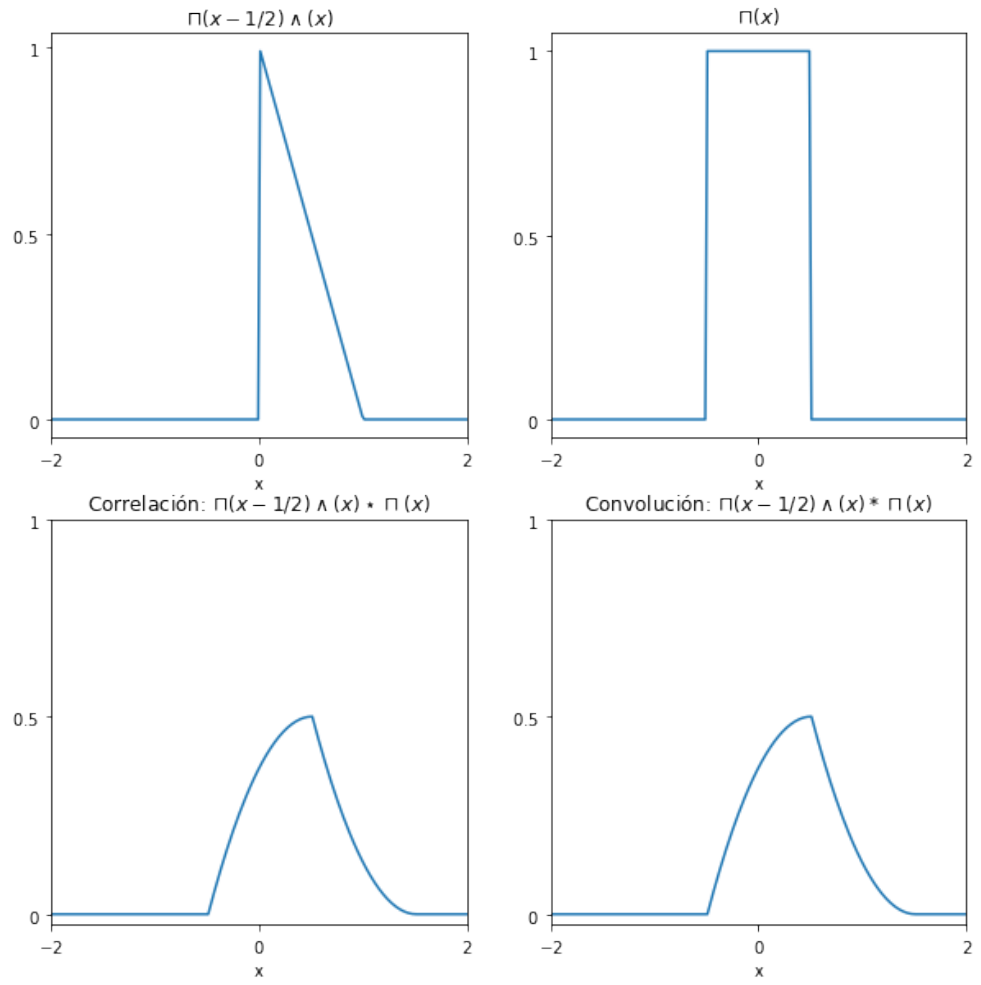
→ **1 pt.**

(b) En este caso, dado que una de las funciones no es par, la autocorrelación y la convolución no coinciden siempre. Pero dado que la función ⊓ es par, se cumple que:

$$\wedge(x) \sqcap (x - 1/2) \star \sqcap(x) = \wedge(x) \sqcap (x - 1/2) * \sqcap(x)$$ → **1 pt.**

Entonces, considerando lo que se pide en el enunciado:

La pregunta 3 continúa en la página siguiente ...



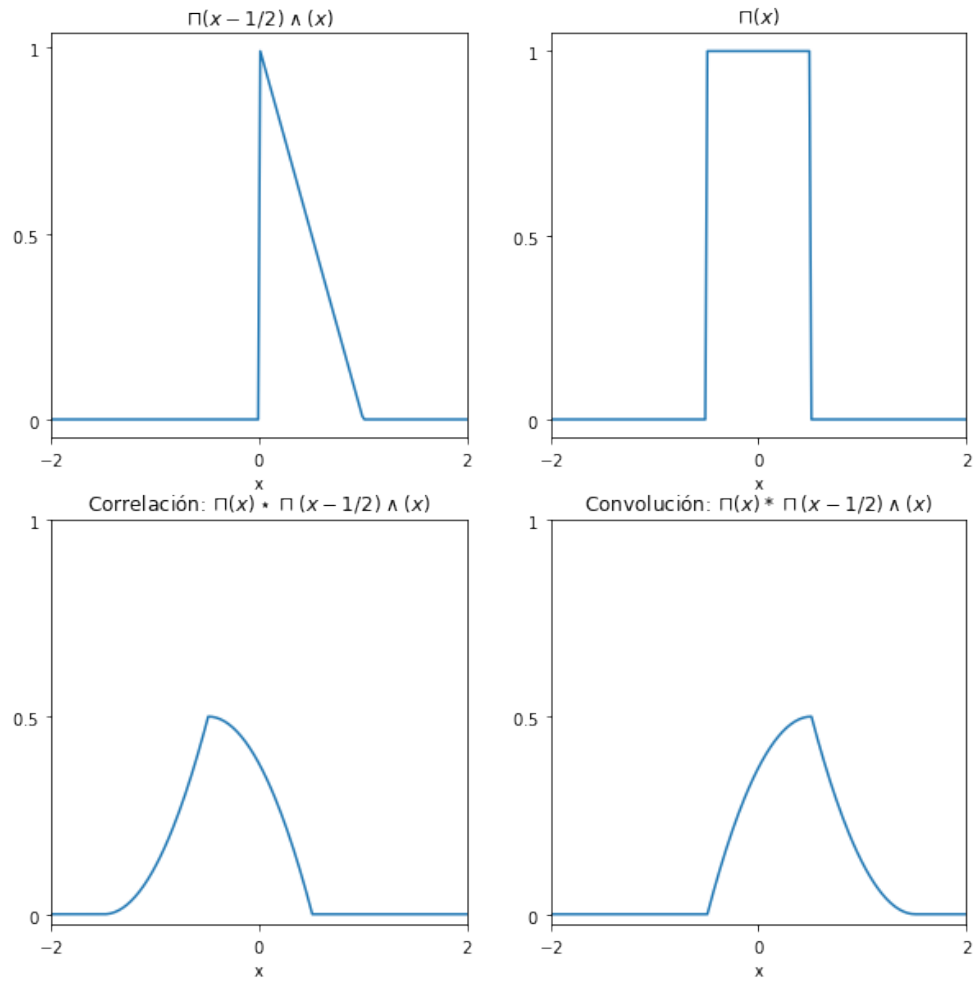
→ **1 pt.**

Sin embargo, la correlación cruzada no es conmutativa, lo que implica que

$$\sqcap(x) \star \wedge(x) \sqcap(x-1/2) \neq \sqcap(x) * \wedge(x) \sqcap(x-1/2)$$

Esto implica que para el caso de la correlación cruzada, importa el orden de la operación, como se ve a continuación:

La pregunta 3 continúa en la página siguiente ...



(c) Utilizamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz, considerando $g(\xi) = f(x+\xi)$:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)f(x+\xi)d\xi\right)^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)^2 d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x+\xi)^2 d\xi \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Es decir,

$$(f \star f)^2(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)^2 d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(x+\xi)^2 d\xi$$

Ahora, notamos que, para todo desfase x, la integral en todo el eje real de una función es igual a la integral de la función deplazada en x:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+\xi)^2 d\xi$$

Lo que nos permite escribir,

$$(f \star f)^2(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)^2 d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)^2 d\xi \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

$$(f \star f)^2(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) f(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) f(\xi) d\xi$$

$$(f \star f)^2(x) \leq (f \star f)(0)(f \star f)(0)$$

$$(f \star f)^2(x) \leq (f \star f)^2(0) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Pero como $(f \star f)^2(0) \geq 0$, entonces

$$\boxed{(f \star f)(x) \leq (f \star f)(0)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

4. (8 pts.) **Cambio de variables en distribuciones**.

Sea T_f una distribución temperada que proviene de una función integrable $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nos interesa poder determinar si es posible concebir un "cambio de variables" de T_f hacia una distribución T_g de manera tal que $g(x) = f(w(x))$, donde $w(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es decir, nos interesa poder utilizar la distribución derivada de $f(x)$, pero ya no evaluada en x, si no en una función de x, determinada por $w(x)$.

(a) (4 pts.) Demuestre que

$$\langle T_g, \varphi \rangle = \langle T_f, \frac{\varphi(w^{-1})}{|w'(w^{-1})|} \rangle$$

donde φ es una función de Schwartz, y w^{-1} es la función inversa de w.

(b) (4 pts.) Utilice el resultado anterior para determinar el significado de "evaluar" un impulso en una función $w(x)$, en el caso específico en que $w(x)$ sea monotónica y que tenga una sola raíz en x_0. Es decir, abusando un poco de la notación, nos interesa determinar que sería

$$\delta(w)$$

Solución

(a) Dado que T_f proviene de una distribución, podemos escribir la siguiente integral para T_g:

$$\langle T_g, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(w(x))\varphi(x)dx \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Hacemos el tradicional cambio de variables, $y = w(x)$, lo que implica que $x = w^{-1}(y)$, $dy = w'(x)dx$. Entonces podemos escribir:

$$\langle T_g, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\varphi(w^{-1}(y)) \frac{1}{|w'(w^{-1}(y))|} dy \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Analizando la integral anterior, vemos que es simplemente

La pregunta 4 continúa en la página siguiente ...

$$\langle T_f, \frac{\varphi(w^{-1})}{|w'(w^{-1})|}\rangle \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(b) Extendiendo el resultado anterior a la distribución δ, tenemos:

$$\langle \delta(w), \varphi\rangle = \langle \delta, \frac{\varphi(w^{-1})}{|w'(w^{-1})|}\rangle = \frac{\varphi(w^{-1}(0))}{|w'(w^{-1}(0))|} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

$$= \frac{\varphi(x_0)}{|w'(x_0)|} = \frac{1}{|w'(x_0)|}\langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle$$

Concluimos que

$$\boxed{\delta(w) = \frac{\delta_{x_0}}{|w'(x_0)|}} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$