Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Tarea 1

Fecha de entrega: 13 de marzo de 2022

---

1. ¿Que es una señal?
   Una señal contiene información. Son magnitudes físicas variables o detectables mediante las que se puede transmitir información[2]

2. Exponga las definiciones de función par y función impar. A partir de esto demuestre que la multiplicación de una función par por una impar es par.

   - Sea $f(x)$ par tal que $f(x) = f(-x)$
   - Sea $g(x)$ impar tal que $-g(x) = g(-x)$
   - Sea $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

   Podemos demostrar matemáticamente que la multiplicación de una función par por una impar es impar:

   $$h(-x) = f(-x) \cdot g(-x)$$

   Usando que f es par tendremos $f(-x) = f(x)$ lo que sustituyo:

   $$h(-x) = f(x) \cdot g(-x)$$

   Si ahora uso que g es impar tendremos $g(-x) = -g(x)$. Sustituyendo en la ecuación anterior:

   $$h(-x) = f(x) \cdot -g(x) \rightarrow h(-x) = -f(x) \cdot g(x)$$

   Dado que $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, lo que obtenemos finalmente es:

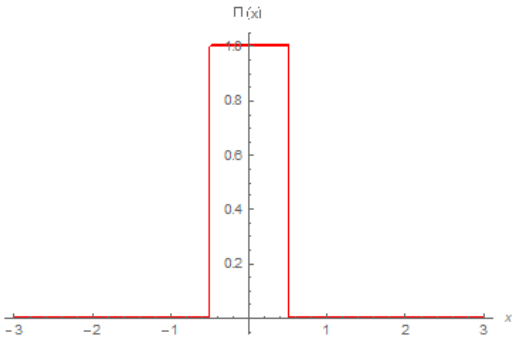
   $$h(-x) = -h(x)$$

   Esto **demuestra** que h es impar, y por lo tanto la multiplicación de una función par por una impar es una función impar.

3. Dibuje las siguientes funciones, analice su continuidad y encuentre para cada una de ellas $\int_{\infty}^{\infty} f(x)dx$:

   a) $f(x) = \sqcap(x)$

   La función rect es un rectángulo de área 1 en la recta real centrado en cero, tal que la función vale 0 fuera del rectángulo y 1 entre $\frac{-1}{2}$ y $\frac{1}{2}$:



   Se puede observar que **la función$\sqcap$(x) es continua en todo x distinto a $\frac{-1}{2}$ y $\frac{1}{2}$**, puesto que en ellos la función hace un "salto vertical.^entre dos puntos.
   ¿Por qué el salto vertical la hace discontinua? En cálculo aprendimos que una función f(x) es continua en un punto a si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

   Observemos que para que esto se cumpla **el límite debe existir**, es decir, debe ser igual por la derecha y por la izquierda:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

   Al observar el gráfico de la función rect, analizando en el punto $\frac{-1}{2}$ tendremos que:

$$\lim_{x \to a^-} \sqcap(x) = 0 \qquad \lim_{x \to a^+} \sqcap(x) = 1$$

   Por lo tanto, la función $\sqcap(x)$ es discontinua en $\frac{-1}{2}$.
   Repitiendo el análisis en $\frac{1}{2}$ se tiene:

$$\lim_{x \to a^-} \sqcap(x) = 1 \qquad \lim_{x \to a^+} \sqcap(x) = 0$$

   Por lo tanto, la función $\sqcap(x)$ es discontinua en $\frac{1}{2}$.

Utilizando su definición y considerando que fuera del rectángulo la función siempre vale cero el valor de su área sobre la recta real es:

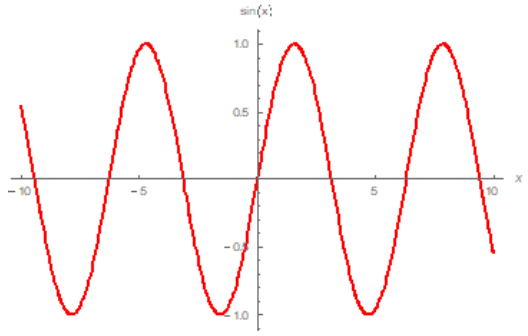
$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqcap(x)dx = \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1(x)dx$$

Resolviendo la integral de la derecha utilizando el teorema fundamental del cálculo se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqcap(x)dx = 1$$

b) $f(x) = \sin(x)$

La función seno es la parte imaginaria de la exponencial compleja e^{ix} y también corresponde a la altura de un punto en el circulo unitario que está a un ángulo x respecto al eje horizontal. Observemos su gráfico:



Se puede observar que la función seno es **continua en todos los reales**, puesto que es periódica y para todo punto el límite por la izquierda y por la derecha de la función al punto son el valor de seno evaluado en el punto.

Sobre la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\ dx$$

Para resolver integrales impropias sabemos que debemos calcular la integral indefinida y usar el teorema fundamental del calculo con el valor del límite de la antiderivada cuando esta tiende al punto impropio, de esta forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\ dx = -\lim_{x\to\infty} \cos(x) + \lim_{x\to-\infty} \cos(x)$$

¿Cuanto valen esos límites? **No existen!** puesto que la función coseno es periódica y su comportamiento al infinito no es predecible.

Erroneamente se podría pensar que esta integral vale cero puesto que coseno es par por lo que se podría asumir que $\cos(-\infty) = \cos(\infty)$. **En sentido estricto**

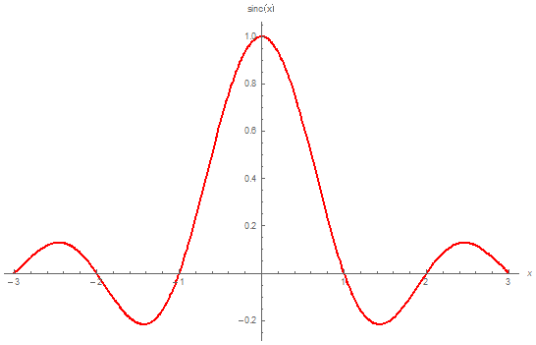
esto está muy mal puesto que **infinito no es un número**, por lo que no se puede asumir $\cos(-\infty) = \cos(\infty)$.
LA FUNCIÓN SENO NO ES INTEGRABLE

c) $f(x) = \text{sinc}(x)$

La función sinc se define como:

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & \forall x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Esta función **es continua**, puesto que en cero (que es el único valor crítico que tiene) el valor del límite de la función **está definido como el valor de la función en el punto**.
El gráfico de la función es:



Y su integral **existe**, puesto que es menor que funciones integrables.

$$\sin(x) <= 1$$

Por lo tanto:

$$\frac{-1}{\pi x} \leq \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \leq \frac{1}{\pi x}$$

Ahora, la integral entre 0 e infinito (para los dos lados) de $\frac{1}{\pi x}$ existe, por lo tanto la de $\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ debe existir, puesto que si la función es menor en magnitud, su área es menor en magnitud.

4. ¿Que es un sistema? Describa al menos 4 propiedades que pueden tener los sistemas.

Un sistema modifica y procesa una señal[1]. Propiedades importantes que pueden tener los sistemas:

- Linealidad.
- Invariancia (no invarianza)
- Invertibilidad
- Estabilidad
- Causalidad

5. Determine si el sistema $g(t) = f(t)\cos(\omega t)$ es lineal.

   Un sistema $L\{x(t)\}$ es lienal cuando cumple homogeneidad y superposición.

   a) Homogeneidad: $\alpha L\{x(t)\} = L\{\alpha x(t)\}$

   Para comenzar, desarrollamos el lado izquierdo de la ecuación:

   $$\alpha L\{x(t)\} = \alpha(f(t)h(t)) = \alpha f(t)Cos(\omega t)$$

   Luego, desarrollamos el lado derecho:

   $$L\{\alpha x(t)\} = \alpha f(t)Cos(\omega t)$$

   Notamos que los resultados obtenidos son iguales, por lo tanto **se cumple homogeneidad**.

   b) Superposición: $L\{x(t) + m(t)\} = L\{x(t)\} + L\{m(t)\}$

   Para comenzar, desarrollamos el lado izquierdo de la ecuación:

   $$L\{f(t) + m(t)\} = Cos(\omega t)[f(t) + m(t)] = f(t)Cos(\omega t) + m(t)Cos(\omega t)$$

   Luego, desarrollamos el lado derecho:

   $$L\{x(t)\} + L\{m(t)\} = f(t)Cos(\omega t) + m(t)Cos(\omega t)$$

   Notamos que los resultados obtenidos son iguales, por lo tanto **se cumple superposición**.

   Finalmente, ya que se cumple linealidad y homogeneidad, se conluye que **el sistema es lineal.**

6. Investigue y explique en forma superficial los siguientes conceptos:

   a) Funciones de Schwartz

   Es una función suave, continua e infinitamente derivable que decae rápidamente a cero.

b) Distribución temperada

Es una operación sobre una función

c) Integral de Lebesgue

Es similar a una integral de Riemann, sin embargo, en lugar de ser una suma de áreas rectángulos verticales es una suma de área de rectángulos horizontales.

Referencias

[1] Pablo Irarrázaval Mena. *Análisis de señales*. Santiago, Chile: McGraw-Hill Interamericana, 1999. ISBN: 9562780791.

[2] S Soliman. *Señales y Sistemas Continuos y Discretos*. Pearson Educación, 1999.