Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Control 7

28 de Abril 2023

Pregunta 1

Sea $F(s)$ la transformada de Laplace de $f(t) = \ln(t)u(t)$:

[3 pts.] Demuestre que $F(\frac{s}{a}) = aF(s) + \frac{a\ln(a)}{s}$, con $a \in \mathbb{R}$.

Dado que $f(t)$ es una señal derecha podemos escribir la transformada unilateral como:

$$F(\frac{s}{a}) = \int_0^\infty a\ln(t)e^{-\frac{s}{a}t}dt$$

Haciendo cambio de variable con $u = t/a$ y $du = dt/a$:

$$F(\frac{s}{a}) = \int_0^\infty a\ln(au)e^{-su}du = \int_0^\infty a\ln(a)e^{-su}du + \int_0^\infty a\ln(u)e^{-su}du$$

Reconocemos que le término de la derecha es la transformada de Laplace de $f(t)$ ponderada por a y podemos integrar facilmente el término de la izquierda:

$$F(\frac{s}{a}) = aF(s) + a\ln(a)\int_0^\infty e^{-su}du = aF(s) + \frac{a\ln(a)}{s}$$

Pregunta 2

[3 pts.] Escriba la serie de Fourier de:

$$f(t) = \sin^2(t)$$

La manera más sencilla de resolver esto es con propiedades trigonométricas, así podemos evitar integrar, sabemos que:

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \qquad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

Al juntar ambas llegamos a que:

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

Con $a_0 = 1/2$ y $a_1 = -1/2$ y todos los demás coeficientes nulos.