Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Control 3

24 de Marzo 2023

---

1. [6 Puntos] Tome las funciones:

$$x(t) = e^{-3t}\cos(2\pi t)\cdot u(t) \qquad h(t) = 2e^{-2t}u(t)$$

Demuestre que para $t \geq 0$ se cumple:

$$\{x(t) * h(t)\} = \frac{2e^{-3t}(e^t - \cos(2\pi t) + 2\pi\sin(2\pi t))}{1+4\pi^2}$$

Planteamos la convolución:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi\tau)e^{-3\tau}u(\tau)\cdot 2e^{-2(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

Al ver esta expresión se puede notar que un escalón elimina todo lo que está bajo 0 y el otro todo lo que está sobre t por lo que puede definir mi integral como:

$$\int_{0}^{t} \cos(2\pi\tau)e^{-3\tau}\cdot 2e^{-2(t-\tau)}d\tau$$

Luego puedo sacar todos los términos constantes:

$$2e^{-2t}\int_{0}^{t} \cos(2\pi\tau)e^{-\tau}d\tau$$

Ahora podemos reemplazar el coseno como:

$$\cos(2\pi\tau) = \frac{e^{j2\pi\tau} + e^{-j2\pi\tau}}{2}$$

Por lo tanto al reemplazar en la integral llegamos a:

$$e^{-2t}\int_{0}^{t} (e^{j2\pi\tau} + e^{-j2\pi\tau})e^{-\tau}d\tau$$

Luego reordenando:

$$e^{-2t}\int_{0}^{t} e^{(j2\pi-1)\tau} + e^{(-j2\pi-1)\tau}d\tau$$

Esta expresión es sencilla de integrar al ser solamente una exponencial, además que al evaluar en 0 la exponencial se hace 1. Integrando esta expresión y evaluando en sus límites se llega a:

$$e^{-2t}(\frac{e^{(-2\pi j-1)t}-1}{-2\pi j-1}+\frac{e^{(2\pi j-1)t}-1}{2\pi j-1})$$

Reordenando y reemplazando las exponenciales complejas por senos y cosenos:

$$e^{-2t}(e^{-t}\frac{\cos(2\pi t)-j\sin(2\pi t)}{-2\pi j-1}+e^{-t}\frac{\cos(2\pi t)+j\sin(2\pi t)}{2\pi j-1}-\frac{2}{1+4\pi^2})$$

Expresando todo bajo el denominador común $1+4\pi^2$ es sencillo expandir la expresión y simplificar los términos para llegar a:

$$\{x(t)*h(t)\}=\frac{2e^{-3t}(e^t-\cos(2\pi t)+2\pi\sin(2\pi t))}{1+4\pi^2}$$

Para la tranquilidad de los alumnos se entregará puntaje parcial por llegar a los pasos intermedios o lo más cercano posible.