IEE2103 - SEÑALES Y SISTEMAS

Interrogación 3

Prof. Rodrigo F. Cádiz

1er. semestre 2022
Tiempo: 2 hrs.
Puntos: 60
Fecha: 06/07/2022

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo dos carillas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre, rut, número de interrogación y número de pregunta en todas las hojas que ocupe. Las hojas sin esta información no serán corregidas.

---

1. (12 pts.) **Filtro promedio móvil**. Considere el filtro promedio móvil resuelto en la tarea en clases, dado por su fórmula recursiva (IIR)

$$g[n] = g[n-1] + \frac{1}{M}(f[n] - f[n-M])$$

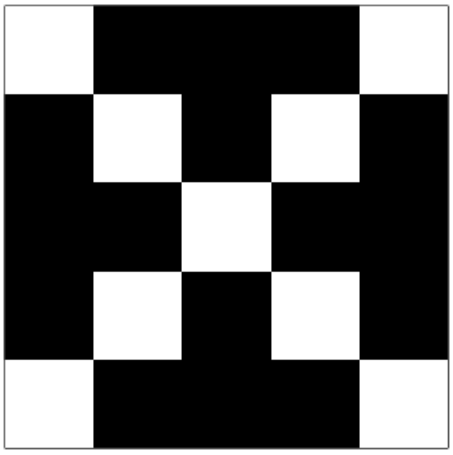
donde M es el orden del filtro, $f[n]$ es la entrada y $g[n]$ la salida.

(a) (2 pts.) Determine una ecuación de diferencias FIR del filtro.

(b) (2 pts.) Dibuje los diagramas de bloques de las formas FIR e IIR del filtro para el caso $M = 3$.

(c) (2 pts.) Determine la respuesta de frecuencia del sistema y bosqueje su magnitud para el caso $M = 3$.

(d) (6 pts.) Suponga que este filtro promedio móvil con $M = 3$ se aplica para cada fila de una imagen en escala de grises de 5×5 como de la figura, a partir del pixel superior izquierdo. En esta imagen 1 es blanco y 0 es negro. Dibuje la imagen de salida del filtro. Asuma que todo lo que esté "fuera" de la imagen vale cero. Puede utilizar distintas intensidades de achurado para ilustrar distintos niveles de grises en la imagen. De manera alternativa a dibujar la imagen, puede especificar la matriz de 5×5 de salida con todos sus valores en cada celda.



La pregunta 1 continúa en la página siguiente ...

Solución

(a) La función de transferencia del sistema IIR es

$$H(z) = \frac{1}{M}\frac{z^M - 1}{z^{M-1}(z-1)} = \frac{1}{M}\frac{z^M - 1}{z^M - z^{M-1}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

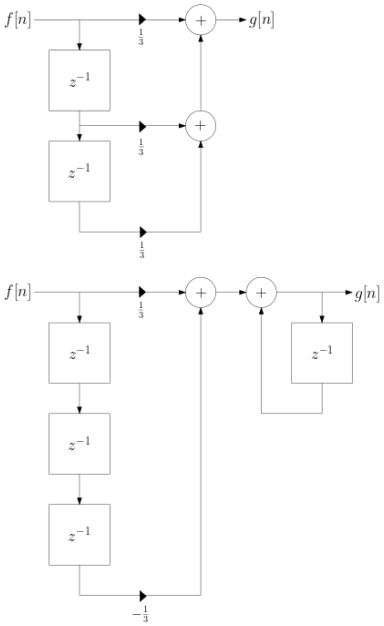
y observamos que este es el resultado de una serie geométrica

$$H(z) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} \mathcal{Z}\{\delta[n-k]\} = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} z^{-k} = \frac{1}{M}\frac{1-z^{-M}}{1-z^{-1}}$$

por lo tanto, la ecuación FIR es

$$g[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} f[n-k] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(b) Los diagramas de bloques FIR (arriba) e IIR (abajo) son



$\rightarrow$ **2 pts.**

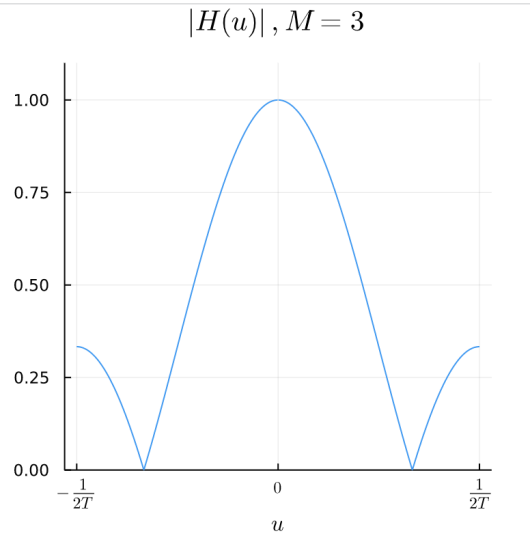
(c) La respuesta de frecuencia se puede encontrar tomando la DTFT

$$H(u) = H(z)\Big|_{z=e^{i2\pi u}}$$

$$H(u) = \frac{1}{M}\frac{1-e^{-i2\pi uM}}{1-e^{-i2\pi u}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

El gráfico de la magnitud de la respuesta de frecuencia es:

La pregunta 1 continúa en la página siguiente ...



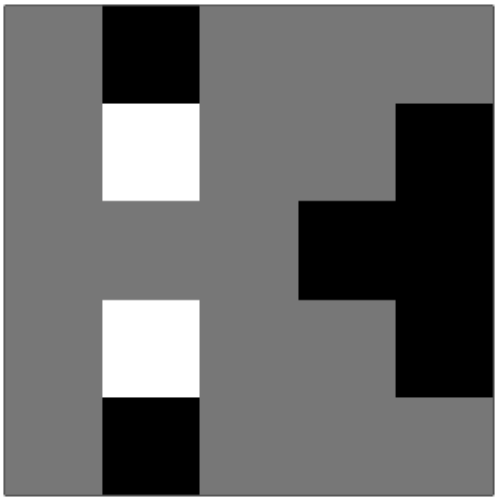
→ **1 pt.**

Observamos que la respuesta de frecuencia alcanza el valor cero dos veces en el intervarlo $[-1/2T, 1/2T]$ y es un pasa-bajos.

(d) Cada píxel de cada fila de la imagen de salida se reemplaza por el promedio entre ese píxel y los dos píxeles vecinos más a la derecha. Por lo que la matriz de la imagen de salida es simplemente

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$ → **6 pts.**

Esta matriz graficada como imagen, es:



2. (12 pts.) **Muestreos**. Considere una señal continua $f(t)$.

   (a) (6 pts.) Suponga que $f(t)$ se muestrea con $2N$ puntos en el intervalo $[0, A]$, con $N \in \mathcal{Z}$ y $A > 0$ utilizando un período de muestreo T.

   i. (2 pts.) Encuentre una expresion para $\tilde{F}[k]$, la DFT de la versión muestreada de $f(t)$.

   ii. (2 pts.) Encuentre la separación en frecuencia U de $\tilde{F}[k]$.

   iii. (2 pts.) Si $N = 4$ encuentre explícitamente todas las frecuencias que $\tilde{F}[k]$ contiene.

   (b) (6 pts.) Suponga que $f(t)$ se muestrea con $N + 1$ puntos en el intervalo $[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]$, con N par ($N \in \mathcal{Z}$) y $A > 0$ utilizando un período de muestreo T.

   i. (2 pts.) Encuentre una expresion para $\tilde{F}[k]$, la DFT de la versión muestreada de $f(t)$.

   ii. (2 pts.) Encuentre la separación en frecuencia U de $\tilde{F}[k]$

   iii. (2 pts.) Si $N = 4$ encuentre explícitamente todas las frecuencias que $\tilde{F}[k]$ contiene.

Solución

(a) i. En este caso tenemos un número par de muestras $2N$, y la DFT queda dada por

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{2N-1} f[n] e^{-i2\pi nk/2N} = \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^{2N-1} f[n] e^{-i\pi nk/N} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

ii. Sabemos que debe cumplirse que $2NUT = 1 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$, es decir

$$U = \frac{1}{2NT} = \frac{1}{A} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

iii. Si $N = 4$, hay ocho muestras en la DFT, por lo que las frecuencias son

$$0, \frac{1}{8T}, \frac{1}{4T}, \frac{3}{8T}, \frac{1}{2T}, \frac{5}{8T}, \frac{3}{4T}, \frac{7}{8T} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

(b) i. En este caso tenemos un número par de muestras $N + 1$, y la DFT queda dada por

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{N+1} \sum_{n=-N/2}^{N/2} f[n] e^{-i2\pi nk/(N+1)} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

ii. Sabemos que debe cumplirse que $(N + 1)UT = 1 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$, es decir

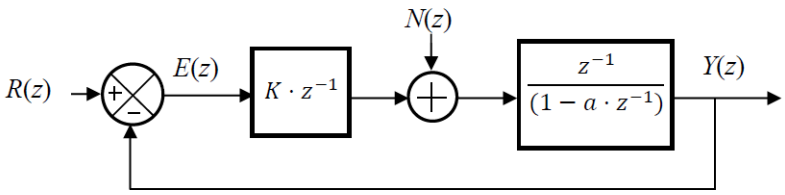
$$U = \frac{1}{(N+1)T} = \frac{1}{A} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

iii. Si $N = 4$, hay cinco muestras en la DFT, por lo que las frecuencias son

$$-\frac{2}{5T}, -\frac{1}{5T}, 0, \frac{1}{5T}, \frac{2}{5T} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

3. (12 pts.) **Sistema realimentado**. El siguiente diagrama de bloques representa un sistema realimentado correspondiente a un lazo de control discreto

La pregunta 3 continúa en la página siguiente ...



Se define el error permanente de un sistema discreto como:

$$e_p = \lim_{n\to\infty} e[n]$$

donde $e[n]$ es la señal de error el sistema, calculada como $e[n] = r[n] - y[n]$, siendo $r[n]$ la entrada del sistema en un instante n e $y[n]$ es la salida del sistema en un instante n.

(a) (2 pts.) Determine el valor de a para el que se logra tener un error permanente finito si la entrada $r[n]$ es una rampa unitaria y $N(z) = 0$. Para esto, considere que el sistema fue muestreado con un período de muestreo $T = 1$

(b) (2 pts.) Analice cómo cambia el valor de a si esta vez el sistema es muestreado con $T = 0.01$

(c) (2 pts.) Se define K_c como el valor que debe tener la constante K para que el sistema sea críticamente estable. Encuentre K_c para el sistema muestreado con $T = 1$ y considerando el valor de a encontrado anteriormente.

(d) (2 pts.) Analice la estabilidad del sistema cuando $a = 1$ y:
   i. (1 pto.) $K > K_c$
   ii. (1 pto.) $K < K_c$

(e) (2 pts.) Determine el error permanente del sistema si $K = \frac{K_c}{2}$, $r[n]$ es un escalón unitario y $N(z) = \frac{2}{1-z^{-1}}$

(f) (2 pts.) Este tipo de realimentación se implementa típicamente en sistemas de control automático. Discuta cual es la importancia del bloque Kz^{-1} para poder controlar el sistema $\frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})}$

Solución

(a) Lo que estamos buscando es que:

$$e_p = \lim_{n\to\infty} e[n]$$

sea convergente. Para calcular el límite usamos teorema del valor final:

$$e_p = \lim_{n\to\infty} e[n] = \lim_{z\to 1}(z-1)E(z) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Donde $E(z)$ es la transformada z de la señal de error $e[n]$. Afortunadamente tenemos el sistema en z, por lo que para encontrar el error permanente solo necesitaremos:

$$e_p = \lim_{z\to 1}(z-1)E(z)$$

Ahora, viendo el diagrama de bloques sabemos que:

La pregunta 3 continúa en la página siguiente ...

$$E(z) = R(z) - Y(z)$$

Tenemos por enunciado que la entrada es una rampa $r[n] = nu[n]$ por lo que tomamos transformada z:

$$r[n] = nu[n] \rightarrow R(z) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

Ahora, debemos buscar $Y(z)$ a partir de $E(z)$ en el diagrama de bloques:

$$Y(z) = E(z)Kz^{-1} + N(z) + \frac{z^{-1}}{1-az^{-1}}$$

Luego, reemplazo esto en $E(z) = R(z) - Y(z)$:

$$E(z) = \left[E(z)Kz^{-1} + N(z)\right] \cdot \frac{z^{-1}}{1-az^{-1}} - R(z)$$

Trabajando el álgebra y reemplazando $N(z) = 0$, la señal de error en z es:

$$E(z) = \frac{z(z-a)}{z^2 - az + K} \cdot \frac{z}{(z-1)^2}$$

Luego, reemplazo en el límite:

$$e_p = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z(z-a)}{z^2 - az + K} \cdot \frac{z}{(z-1)^2}$$

Notamos que el único valor que evita que el límite valga infinito es $\boldsymbol{a = 1}$. En este caso:

$$e_p = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z(z-1)}{z^2 - az + K} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{1}{K} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(b) Si T cambia de valor, el valor de a no cambia $\rightarrow$ **2 pts.**

(c) Para resolver esto, consideramos que estabilidad crítica significa que los polos de la función de transferencia del sistema están dentro del círculo unitario. Entonces, buscamos la función de transferencia del sistema:

$$F(z) = \frac{Y(z)}{R(z)}$$

En el diagrama de bloques se puede observar que (reemplazando $a = 1$):

$$Y(z) = [R(z) - Y(z)] \cdot Kz^{-1} \cdot \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})}$$

Por álgebra se obtiene:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K}{z^2 - z + K}$$

La pregunta 3 continúa en la página siguiente ...

(d) A continuación, buscamos los polos:

$$z^2 - z + K = 0$$

Los polos están en:

$$z_p = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4K}}{2}$$

Para que el sistema sea críticamente estable, los polos deben tener módulo 1, entonces: $|z_p = 1|$:

$$\sqrt{\left(\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4K_c}}{2}\right)^2} = 1$$

(e) Para resolver esto, debemos considerar que la solución z_p puede ser real o compleja, por lo que debemos analizar ambos casos:

i. z_p real: en este caso asumimos que el argumento de la raíz es positivo:

$$1 - 4K_c > 0 \rightarrow K_c < \frac{1}{4}$$

Además, dado que lo que tenemos es un número real, al calcular el módulo tendremos:

$$|z_p| = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4K_c}}{2} = 1$$

Despejando obtenemos que la solución de esta ecuación es:

$$\boldsymbol{K_c = 0} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

ii. z_p complejo: en este caso el argumento de la raíz es negativo, lo que implica $K_c > \frac{1}{4}$. Además, para calcular el módulo debemos tomar la raíz de la parte real al cuadrado más la parte imaginaria al cuadrado.
En la expresión

$$z_p = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{4K_c - 1}\right)$$

La parte real es $\frac{1}{2}$ y la parte imaginaria es $\sqrt{4K_c - 1}$ (Se toma el valor absoluto de la raíz para encontrar la parte imaginaria), luego, en este caso el módulo igual a 1 está dado por:

$$|z_p| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + \left(\sqrt{4K_c - 1}\right)^2} = 1$$

Despejando:

$$\sqrt{1^2 + 4K_c - 1} = 2 \rightarrow 4K_c = 4$$

Por lo que finalmente:

$$\boldsymbol{K_c = 1} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

La pregunta 3 continúa en la página siguiente ...

(f) Analizando la estabilidad del sistema cuando $a = 1$ y:

i. $K > K_c$:

Si $K > K_c$ el sistema se vuelve inestable, puesto que los polos dejan de estar en el círculo unitario, por ejemplo para $K = 2$:

$$P(z) = z^2 - z + 2 \rightarrow z_p = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{-7}\right)$$

Que en módulo es:

$$|z_p| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 7^2} \rightarrow |z_p| = \sqrt{2} > 1 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

ii. $K < K_c$:

Por otro lado, si tomamos un valor de K que sea menor que K_c (considerando k positivo como restricción de estabilidad) obtendremos polos dentro del círculo unitario. Por ejemplo $K = \frac{1}{2}$:

$$P(z) = z^2 - z + \frac{1}{2} \rightarrow z_p = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$$

Que en módulo es:

$$|z_p| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} \rightarrow |z_p| = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(g) Para resolver esto, vamos a tomar otra visión del error:

$$\lim_{n\to\infty} e[n] = \lim_{n\to\infty} r[n] - \lim_{n\to\infty} y[n] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Dado que la entrada es un escalón unitario, tendremos que:

$$\lim_{n\to\infty} r[n] = 1$$

Por lo tanto el error será:

$$\lim_{n\to\infty} e[n] = 1 - \lim_{n\to\infty} y[n]$$

Por lo tanto, debemos encontrar $\lim_{n\to\infty} y[n]$ para encontrar el error. Usaremos teorema del valor final:

$$\lim_{n\to\infty} y[n] = \lim_{z\to 1}(z-1)Y(z)$$

Buscamos $Y(z)$ en el diagrama de bloques quedando:

$$Y(z) = \frac{K}{z^2 - z + K}R(z) + \frac{z^2 - z}{z^2 - z + K}N(z)$$

Reemplazo:

$$R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \qquad \text{Transformada z del escalón}$$

La pregunta 3 continúa en la página siguiente ...

$$N(z) = \frac{2}{1 - z^{-1}} \qquad \text{Valor de } N(z) \text{ enunciado}$$

$$K = \frac{1}{2}K_c \rightarrow K = \frac{1}{2} \qquad \text{Enunciado}$$

Finalmente:

$$Y(z) = \frac{0.5}{z^2 - z + 0.5}\frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{z^2 - z}{z^2 - z + 0.5}\frac{2}{1 - z^{-1}}$$

Luego:

$$\lim_{n\to\infty} y[n] = \lim_{z\to 1}(z - 1)\left[\frac{0.5}{z^2 - z + 0.5}\frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{z^2 - z}{z^2 - z + 0.5}\frac{2}{1 - z^{-1}}\right]$$

Desarrollando el límite se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} y[n] = 1$$

Por lo que el error permanente es:

$$\lim_{n\to\infty} e[n] = 1 - 1_p = 0 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(h) El bloque Kz^{-1} aporta a la estabilización del sistema $\rightarrow$ **1 pt.** Para poder controlar un sistema (generar una salida deseada), es muy importante que el sistema responda en forma acotada a las indicaciones de control que le doy. Si el sistema no es estable no puede ser controlado $\rightarrow$ **1 pt.**

4. (12 pts.) **Sistema discreto**. Considere un sistema discreto descrito por la ecuación de diferencias:

$$y[n] = b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + x[n]$$

donde $y[n]$ es la salida y $x[n]$ la entrada. Suponga que la salida de este sistema pasa por un filtro cuya función de transferencia es $H(z) = (1 - z^{-1})^2$.

(a) (6 pts.) Determine la salida del filtro $g[n]$ en términos de la señal de entrada $x[n]$.

(b) (2 pts.) Dibuje el diagrama de bloques del sistema $x[n] \rightarrow g[n]$.

(c) (4 pts.) Determine los primeros cuatro coeficientes de la respuesta al impulso del sistema $x[n] \rightarrow g[n]$.

Solución

(a) Tenemos que

$$G(z) = H(z)Y(z) = (1 - 2z^{-1} + z^{-2})Y(z) \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Tomando Transformada Z inversa

La pregunta 4 continúa en la página siguiente ...

$$g[n] = y[n] - 2y[n-1] + y[n-2] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Sustituyendo para $y[n]$ tenemos que

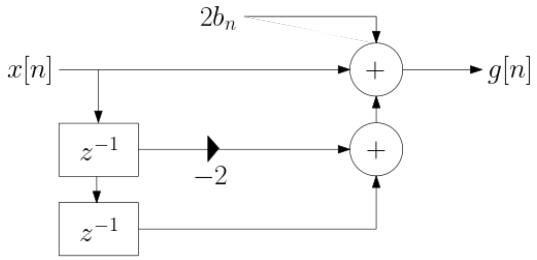
$$\begin{aligned} g[n] &= b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + x[n] \\ &-2(b_0 + b_1(n-1) + b_2(n-1)^2 + x[n-1]) \\ &+b_0 + b_1(n-2) + b_2(n-2)^2 + x[n-2] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}} \end{aligned}$$

Es decir

$$\begin{aligned} g[n] &= b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + x[n] \\ &-2b_0 - 2b_1 n + 2b1 - 2b_2 n^2 + 4b_2 n - 2b_2 - 2x[n-1] \\ &+b_0 + b_1 n - 2b_1 + b_2 n^2 - 4b_2 n + 4b_2 + x[n-2] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}} \end{aligned}$$

$$\boxed{g[n] = 2b_2 + x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(b) El diagrama de bloques es



$\rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$

(c) Operando recursivamente tenemos que

$n = 0$:

$$h[0] = 2b_2 + 1 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

$n = 1$:

$$h[1] = 2b_2 + 0 - 2 = 2b_2 - 2 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

$n = 2$:

$$h[2] = 2b_2 + 0 - 2 \times 0 + 1 = 2b_2 + 1 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

$n = 3$:

$$h[3] = 2b_2 + 0 - 2 \times 0 + 0 = 2b_2 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

5. (12 pts.) **Secuencias discretas.** Considere las secuencias discretas

La pregunta 5 continúa en la página siguiente ...

$$f[n] = \underline{4}, 3, 2, 1 \;\; y \;\; g[n] = \underline{4}, 4, 4, 4$$

(a) (2 pts.) Determine la densidad espectral de potencia de $f[n]$.

(b) (2 pts.) Determine la densidad espectral de potencia de $g[n]$.

(c) (2 pts.) Determine la secuencia de autocorrelación de $f[n]$.

(d) (2 pts.) Determine la secuencia de autocorrelación de $g[n]$.

(e) (2 pts.) Determine la convolución circular entre $f[n]$ y $g[n]$.

(f) (2 pts.) Determine la correlación cruzada entre $f[n]$ y $g[n]$.

HINT: Recuerde (de la Interrogación 2) que la densidad espectral de potencia de una señal discreta $f[n]$ cuya DFT es $F[k]$ es $|F[k]|^2$. Además, la secuencia de autocorrelación de una señal aleatoria estacionaria $w[n]$ se define como $r_w[\ell] = E\{w[n]w[n-\ell]\}$ donde E denota el valor esperado o esperanza de la variable aleatoria y ℓ denota un retraso. La densidad espectral de potencia de una señal es la Transformada de Fourier de su secuencia de autocorrelación.

Solución

(a) Primero calculamos $\tilde{F}[k]$, es decir

$$\tilde{F}[k] = [\underline{\frac{5}{2}, \frac{1}{2}} - \frac{i}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{i}{2}] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Entonces la densidad espectral de potencia es

$$|\tilde{F}[k]|^2 = [\underline{\frac{25}{4}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(b) Primero calculamos $\tilde{G}[k]$, es decir

$$\tilde{G}[k] = [\underline{4}, 0, 0, 0] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Entonces la densidad espectral de potencia es

$$|\tilde{G}[k]|^2 = [\underline{16}, 0, 0, 0] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(c) Para calcular $r_f[\ell]$ tomamos la transformada inversa de la densidad espectral de potencia, es decir

$$r_f[\ell] = \text{DFT}^{-1}\{[\underline{\frac{25}{4}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}]\} = [\underline{\frac{15}{2}}, 6, \frac{11}{2}, 6] \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

(d) Para calcular $r_g[\ell]$ tomamos la transformada inversa de la densidad espectral de potencia, es decir

$$r_g[\ell] = \text{DFT}^{-1}\{[\underline{16}, 0, 0, 0]\} = [\underline{16}, 16, 16, 16] \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

La pregunta 5 continúa en la página siguiente ...

(e) Para calcular la convolución circular, multiplicamos las DFT es decir

$$\{F \times G\}[k] = [\underline{\frac{5}{2}}, \frac{1}{2} - \frac{i}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{i}{2}] \times [\underline{4}, 0, 0, 0] = [\underline{10}, 0, 0, 0] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

y tomamos la inversa (considerando el factor N)

$$\{f * g\}[n] = 4 \times \text{DFT}^{-1}[\underline{10}, 0, 0, 0] = 4 \times [\underline{10}, 10, 10, 10] = [\underline{40}, 40, 40, 40] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(f) Para calcular la correlación cruzada, extendemos la definición de la autocorrelación, es decir

$$\{f \star g\}[n] = 4 \times \text{DFT}^{-1}\{F^*[k]G[k]\} = 4 \times \text{DFT}^{-1}\{[\underline{\frac{5}{2}}, \frac{1}{2} + \frac{i}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{i}{2}] \times [\underline{4}, 0, 0, 0]\}$$

$$= 4 \times \text{DFT}^{-1}\{[\underline{10}, 0, 0, 0]\} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

y resolviendo la inversa, tenemos

$$\{f \star g\}[n] = 4 \times [\underline{10}, 10, 10, 10] = [\underline{40}, 40, 40, 40] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Otra opción sería simplemente notar la simetría y comprobar que la correlación cruzada y la convolución circular debieran dar lo mismo.