Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Tarea 10

Fecha de entrega: 15 de mayo de 2022

---

1. Escriba la definición de convolución discreta lineal.

   La definición de convolución lineal discreta es:

$$\{f *_l g\}[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f[i]g[n-i]$$

2. Calcule las convoluciones:

   - $(1\ 2\ 1) *_l (1\ 2\ 1)$

     Siguiendo la definición y **asumiendo que si no nos indican donde está el cero este está en el extremo izquierdo de la secuencia**, se tendrá:

$$h[n] = (1\ 2\ 1) *_l (1\ 2\ 1)$$

     Para cada valor de n:

$$h[0] = 1 + 0 + 0 \quad \rightarrow h[0] = 1$$

$$h[1] = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \rightarrow h[1] = 4$$

$$h[2] = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \rightarrow h[2] = 6$$

$$h[3] = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \rightarrow h[3] = 4$$

$$h[4] = 1 \cdot 1 \rightarrow h[4] = 1$$

     Finalmente, el resultado de la convolución es:

$$h[n] = (1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1)$$

     Esto es de largo 5, lo que concuerda con que el largo de la convolución lineal entre dos secuencias de largos N y M es de largo N + M -1.

- $(1\ 1) *_l (1\ 1) *_l (1\ 1)$
  Siguiendo el procedimiento anterior se obtiene:

$$f[n] = (1\ 1) *_l (1\ 1) *_l (1\ 1) = (1 \quad 3 \quad 3 \quad 1)$$

3. Escriba la definición de convolución cíclica.

   Para dos secuencias periódicas $\tilde{f}[n]$ y $\tilde{g}[n]$ [1], si estas tienen el mismo período P se define la convolución circular[2] como:

$$\{f * g\}[n] = \sum_{m=0}^{P} \tilde{f}[n-m]\tilde{g}[m]$$

   BONUS: +1 décima si explican cómo se resuelve la convolución cíclica de señales periódicas de distinto período

4. Calcule las convoluciones:

   - $(1\ 2\ 1) * (1\ 2\ 1)$

     Notemos que esto se resuelve *igual* que la convolución lineal pero en vez de llenar las zonas sin traslape con ceros, se llena con la información de un período. De esta forma tendremos:

$$h[0] = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \rightarrow h[0] = 6$$
$$h[1] = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \rightarrow h[1] = 6$$
$$h[2] = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \rightarrow h[0] = 6$$

     De esta forma, la secuencia obtenida es:

$$(1\ 2\ 1) * (1\ 2\ 1) = (6 \quad 6 \quad 6)$$

   - $(1\ 0\ 1\ 0) * (0\ 1\ 0\ 1)$
     Para resolver esto, utilizamos el mismo procedimiento anterior, obteniendo:

$$(1\ 0\ 1\ 0) * (0\ 1\ 0\ 1) = (0 \quad 2 \quad 0 \quad 2)$$

[1] En general se escriben las secuencias periódicas de la forma $\tilde{f}[n]$. Si tienen el *cachirulo* significa que son periódicas

[2] Se escribirá la convolución lineal entre dos funciones discretas como $f *_l g$ y la convolución circular como $\tilde{f} * \tilde{g}$

5. Investigue por qué las ecuaciones de diferencias son importantes para analizar sistemas discretos y encuentre la solución a la ecuación de diferencias:

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 0$$

si $y[0] = 1$, $y[1] = -2$.

Comenzamos planteando el polinomio característico asociado:

$$1 - \tfrac{3}{4}x^{-1} + \tfrac{1}{8}x^{-2} = 0$$

Resolvemos multiplicando toda la ecuación por x^2 quedando:

$$x^2 - \tfrac{3}{4}x + \tfrac{1}{8} = 0$$

Utilizando $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ obtenemos $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{4}$

Entonces, la solución de la ecuación es:

$$y[n] = \alpha_1 \left(\tfrac{1}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\tfrac{1}{4}\right)^n$$

Para encontrar los valores de α_1 y α_2 evaluamos a conveniencia en n = 0 y reemplazamos los valores:

$$y[0] = 1,\ y[-1] = -2$$

Según la solución:

$$y[n] = \alpha_1(\tfrac{1}{2})^n + \alpha_2(\tfrac{1}{4})^n$$

Sustituyendo n = 0:

$$1 = \alpha_1 + \alpha_2$$

Sustituyendo n = -1:

$$-2 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\alpha_1 = 3 \text{ y } \alpha_2 = -2$$

Finalmente, la solución al problema planteado es:

$$y[n] = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

6. Encontrar la respuesta al impulso del sistema:

$$y[n] = y[n-1] + 2 \cdot y[n-2] + \frac{1}{2} \cdot x[n]$$

Para encontrar la respuesta al impulso es necesario resolver la ecuación en diferencias homogénea. Al reordenar se encuentra:

$$y[n+2] - y[n+1] - 2 \cdot y[n] = 0$$

que tiene como ecuación característico:

$$r^2 - r - 2 = 0$$

con raíces $r = 2$ y $r = -1$. Así, la solución es de la forma:

$$y[n] = k_1 \cdot 2^n + k_2 \cdot (-1)^n$$

De esta forma, la salida del sistema dependerá de las condiciones iniciales, que no han sido dadas.