Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Ayudantía 3

2 de Septiembre 2022

Nicolás Kantor Nagel - nkantorn@uc.cl
Belén Bravo Kunz - bkbravo@uc.cl

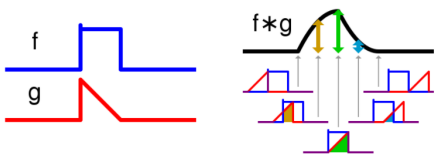
Resumen

Convolución

Se define la convolución como una operación entre dos funciones que nos entrega como resultado una tercera función. Su expresión matemática es:

$$h(t) = \{g * f\}(t) = \int_{\infty}^{\infty} g(x)f(t-x)dx$$

Lo que gráficamente corresponde a el área de la función multiplicación entre una de las funciones estática y la otra desplazada para todos los posibles desplazamientos.



La convolución cumple con las siguientes propiedades:

- Conmutatividad: $h(t) = \{g * f\}(t) = \{f * g\}(t)$
- Asociatividad: $h(t) = \{r * \{g * f\}\}(t) = \{g * \{r * f\}\}(t)$
- Distributividad: $h(t) = \{g * (f + r)\}(t) = \{g * f\} + \{g * r\}(t)$
- Multiplicación por escalar: $h(t) = \{a \cdot g * f\}(t) = \{g * a \cdot f\}(t) = a \cdot \{g * f\}(t)$
- Derivación: $h(t) = \{g * f\}(t) \rightarrow h'(t) = h(t) = \{g' * f\}(t) = h(t) = \{g * f'\}(t)$
- Convoluciones con el impulso: cumple con la propiedad del cedazo, y además se harán evidentes algunos desplazamientos.
  - $h(t) = \delta(x) * f(x) = f(x)$

- $h(t) = \delta(x-a) * f(x) = f(x-a)$
- $h(t) = \delta(x) * f(x-a) = f(x-a)$
- $h(t) = \delta(x-a) * f(x-b) = f(x-a-b)$

Respuesta al impulso

- La respuesta al impulso de un sistema corresponde a la salida del sistema cuando la entrada es un impulso. En general se denota por $h(t)$.

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{L\{f(t)\}}} \longrightarrow h(t)$$

- Los sistemas LTI se caracterizan por su respuesta al impulso. **Para un sistema lineal e invariante, la salida del sistema corresponde a la convolución entre la entrada y la respuesta al impulso.** Gráficamente, si el sistema L a continuación es LTI con respuesta al impulso $h(t)$ se tendrá que:.

$$f(t) \longrightarrow \boxed{\text{L\{f(t)\}}} \longrightarrow \{h * f\}(t)$$

Ejercicios

1. Calcule la convolución $\sqcap(x) * \sqcap(x)$

2. A partir de la respuesta anterior encuentre:

   a) $\{\sqcap' * u\}(x)$
   Para resolver esto es nececario usar la propiedad de la derivación, tal que:

   $$\{\sqcap' * u\} = \{\sqcap * u'\}$$

   Dado que la derivada de escalón es el impulso:

   $$\{\sqcap * u'\} = \{\sqcap * \delta\}$$

   Por propiedad del cedazo:

   $$\{\sqcap * \delta\}(x) = \sqcap(x)$$

   b) $\sqcap * \{\delta + \sqcap\}(x)$ Sabemos que la convolución es distributiva, por lo que:

   $$\sqcap * \{\delta + \sqcap\}(x) = \{\sqcap * \delta + \sqcap * \sqcap\}(x)$$

   Aplicando propiedad del cedazo y convoluciones conocidas:

   $$\{\sqcap * \delta + \sqcap * \sqcap\}(x) = \sqcap(x) + \wedge(x)$$

   c) $\sqcap * \{\delta_b + \sqcap\}(x)$
   Aplicamos distributividad:

   $$\sqcap * \{\delta_b + \sqcap\}(x) = \{\sqcap * \delta_b + \sqcap * \sqcap\}(x)$$

   Aplicando cedazo y convoluciones conocidas:

   $$\{\sqcap * \delta + \sqcap * \sqcap\}(x) = \sqcap(x - b) + \wedge(x)$$

   d) $\sqcap * \{\sqcap + \sqcap\}(x)$
   Aplicando distributividad y convoluciones conocidas:

   $$\sqcap * \{\sqcap + \sqcap\}(x) = 2 \wedge (x)$$

3. Encuentre la convolución de la función $f(x) = \wedge(x)$ con las siguientes funciones:

a) $f(x) * \sqcap(x)$

b) $f(x) * u(x)$

c) $f(x) * e^{-x} \sqcap (x)$

4. Demuestre que si $g(x) = f(x) * h(x)$ entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx$$

$$g(x) = f(x) * h(x)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) * g(x)dx$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)h(x-\xi)d\xi dx$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} h(x-\xi)dxd\xi$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)d\xi \int_{-\infty}^{\infty} h(\gamma)d\gamma$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx$$

Notar que la demostración de la igualdad hace uso del teorema de Fubini que tiene como condición el que la función en cuestión sea absolutamente integrable. En nuestro caso:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) * g(x)|dx < \infty$$

Esto último también explica el por qué integrar $h(x-\xi)$ es lo mismo que hacerlo pero con $h(x)$. El área bajo la curva de ambas funciones es la misma ya que la primera es solo una forma desplazada de la segunda bajo la observación de que se está integrando en todos los reales y, como ya se mencionó, se trabaja con funciones absolutamente integrables.

5. Suponga que alguien erróneamente cree que la regla de la cadena se aplica a la convolución, $(f * g)' = f' * g + f * g'$. Encuentre el error $e(x)$, la diferencia entre el resultado erróneo y el correcto, si $f(x) = \sqcap(x)$ y $g(x) = u(x)$. Para resolver este problema lo primero es saber que la propiedad de la derivada de la convolución es $(f * g)' = f' * g = f * g'$. Con esto establecido es que podemos calcular la diferencia entre el resultado de la supuesta regla de la cadena y la propiedad que será $e(x)$:

$$e(x) = f' * g + f * g' - (f * g)' = 2((f * g)') - (f * g)' = (f * g)'$$

Como se pide el error cuando $f(x) = \sqcap(x)$ y $g(x) = u(x)$ es conveniente expresar esta última expresión como $f * g'$. De esta manera:

$$e(x) = \sqcap(x) * (u(x))' = \sqcap(x) * \delta(x) = \sqcap(x)$$

6. Se tiene un sistema LTI cuya respuesta a la rampa $xu(x)$ es $u(x-1)$. Determine la respuesta del sistema ante la entrada $(e^x - x - 1)u(x)$ Para comenzar, consideramos la definición de respuesta al impulso: **la respuesta al impulso de un sistema es la salida del sistema cuando lo que ingresa es un impulso**.

   A continuación, consideramos que **la salida de un sistema LTI es la convolución entre la entrada y la respuesta al impulso.**

   Luego, la respuesta al impulso de un sistema es:

   $$\{h * \delta\}(x) = h(x)$$

   Ahora, no tenemos la respuesta al impulso pero sí tenemos la respuesta a la rampa. **Nos interesa analizar cómo se relacionan el impulso y la rampa**. Sabemos que **el impulso es la derivada de escalón**, por lo que derivamos la rampa:

   $$\frac{d}{dx}(xu(x)) = u(x) + \delta\ x$$

   Por propiedad del muestreo:

   $$\delta\ x = 0$$

   Entonces, la derivada de la rampa es:

   $$\frac{d}{dx}(xu(x)) = u(x)$$

   Luego, si derivamos la rampa por segunda vez:

   $$\frac{d^2}{dx^2}(xu(x)) = u'(x) = \delta$$

   Entonces **el impulso es la segunda derivada de la rampa**. Por lo tanto, considerando $(xu(x))'' = \delta$ y sustituyendo en la definición de respuesta enunciada más arriba tendremos:

   $$h(x) = \{h * \delta\}(x) = \{h * (xu(x))''\}(x)$$

Si ahora usamos la propiedad de derivación de la convolución:

Recordatorio de la propiedad:

Si:

$$\{f * g\}(x) = r(x)$$

$$\left\{\frac{d^n}{dx^n} f * g\right\}(x) = \left\{f * \frac{d^n}{dx^n} g\right\} = \frac{d^n}{dx^n} r(x)$$

Sea la respuesta a la rampa:

$$k(x) = \{h * xu(x)\}(x)$$

Por propiedad de derivación de la convolución la segunda derivada de la respuesta a la rampa será la respuesta al impulso:

$$k''(x) = \{h * (xu(x))''\}(x) = \{h * \delta\}(x) = h(x)$$

Entonces, tendremos que la respuesta al impulso del sistema es:

$$h(x) = \frac{d^2}{dx^2}[u(x-1)]$$

Luego, dado que la salida de un sistema LTI es la convolución entre la entrada y la respuesta al impulso se tiene que la salida del sistema cuando entra $(e^x - x - 1)u(x)$ será:

$$y(x) = \{h(x) * (e^x - x - 1)u(x)\} = \left\{\frac{d^2}{dx^2}[u(x-1)] * (e^x - x - 1)u(x)\right\}$$

A continuación, uso propiedad de la derivación en la convolución de forma conveniente:

$$y(x) = \left\{\frac{d}{dx}u(x-1) * \frac{d}{dx}[(e^x - x - 1)u(x)]\right\}$$

Tomo la primera derivada de la señal de entrada:

$$\frac{d}{dx}[(e^x - x - 1)u(x)] = \delta\ (e^x - x - 1) + u(x)(e^x - 1)$$

Usando propiedad del muestreo (evaluar en cero la función multiplicada por δ) la expresión de la izquierda vale cero, por lo que se obtiene:

$$\frac{d}{dx}[(e^x - x - 1)u(x)] = u(x)(e^x - 1)$$

Ahora tomo la primera derivada de la respuesta a la rampa:

$$\frac{d}{dx}\left[u(x-1)\right] = \delta_1$$

Luego, la salida del sistema será:

$$y(x) = \{\delta_1 * u(x)(e^x - 1)\} = u(x-1)\left[e^{x-1} - 1\right]$$

7. Determine si el sistema LTI con respuesta al impulso $h(t) = e^{-2t}u(t)$ es estable

   Un sistema es estable cuando a entradas acotadas entrega salidas acotadas. Toda señal acotada se puede escribir como una multiplicación entre la función y un rect correctamente escalado. Supongamos que una señal es acotada entre $-\xi$ y ξ (esto significa que fuera de $-\xi$ y ξ vale 0). Ahora, sabemos que la salida del sistema ante la entrada acotada $f(x) = f(x) \cdot \sqcap\left(\frac{1}{2\xi}\right)$ será la convolución entre la entrada y la respuesta al impulso, es decir:

$$y(x) = \{h * f\}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \sqcap\left(\frac{t}{2\xi}\right) \cdot e^{-2(x-t)}u(x-t)\ \mathrm{dt}$$

   Ahora, sabemos que el rect vale 1 entre $-\xi$ y ξ y cero fuera de este rango por lo que podemor re escribir como:

$$y(x) = \{h * f\}(x) = \int_{-\xi}^{\xi} f(t) \cdot e^{-2(x-t)}u(x-t)\ \mathrm{dt}$$

   Notemos que el escalón valdrá 0 si x es negativo, independiente del valor de t, por lo tanto la integral va multiplicada por escalón de x. También observemos que si x es positivo, el escalón solo valdrá 1 si $x > t$, es decir, solo vale la pena integrar entre $x > -\xi$ y ξ, por lo que escalón de x lo corremos hasta $-\xi$.

$$y(x) = u(x+\xi)e^{-2x}\int_{x}^{\xi} f(t) \cdot e^{2t}\ \mathrm{dt}$$

   Si $f(x)$ es continua, la integral multiplicada por e^{2t} en un intervalo acotado siempre converge a un número.

   Observemos que **la salida siempre será acotada, porque e^{-2x} es decreciente y la salida parte en $-\xi$, por lo que la integral de convolución no diverge y la salida no se va a infinito.**

8. Determine si el sistema promedio móvil con $\Delta x > 0$ es estable:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta x} \sqcap \left(\frac{x - \xi}{\Delta x} \right) f(\xi) d\xi$$

Para resolver esto debemos considerar la definición de estabilidad en sentido BIBO: un sistema es estable si a entradas acotadas entrega salidas acotadas.

Para determinar si es estable, podemos re escribir la integral. En primer lugar, usando linealidad de la integral:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta x} \sqcap \left(\frac{x - \xi}{\Delta x} \right) f(\xi) d\xi = \frac{1}{\Delta x} \int_{-\infty}^{\infty} \sqcap \left(\frac{x - \xi}{\Delta x} \right) f(\xi) d\xi$$

Ahora, usamos la definición de rect. La función $\sqcap$ vale 1 si lo que está en el argumento tiene un valor absoluto en $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y vale 0 si el argumento[1] está fuera de este intervalo. Entonces, buscamos los valores de ξ que hacen que lo que está dentro de la integral tenga sentido. Para comenzar buscamos el límite superior (los signos están cambiados porque ξ es negativo):

$$\frac{x - \xi_1}{\Delta x} = -\frac{1}{2}$$

Despejando ξ de la ecuación tendremos:

$$\xi_1 = x + \frac{\Delta x}{2}$$

Luego, del mismo modo calculamos el límite inferior del rect:

$$\frac{x - \xi_1}{\Delta x} = \frac{1}{2}$$

Despejando ξ de la ecuación tendremos:

$$\xi_1 = x - \frac{\Delta x}{2}$$

De esta forma sabemos que:

$$\sqcap \left(\frac{x - \xi}{\Delta x} \right) f(\xi) = \begin{cases} f(\xi) & \forall \xi \int \left(x - \frac{\Delta x}{2}, x + \frac{\Delta x}{2}\right) \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

[1] El argumento es lo que está adentro del rect. Para $\sqcap(a)$ el argumento es a. Para $\sqcap(\text{hola})$ el argumento es hola.

Con esto en mente podemos reemplazar en la integral:

$$g(x) = \frac{1}{\Delta x}\int_{-\infty}^{\infty} \sqcap\left(\frac{x-\xi}{\Delta x}\right) f(\xi)d\xi = \frac{1}{\Delta x}\int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} f(\xi)d\xi$$

Con esta forma del sistema, usamos la definición. Un sistema es estable si **a entradas acotadas entrega salidas acotadas**. Notemos que si f(x) es acotado **no se va a infinito en el intervalo**, por lo tanto usando teorema fundamental del cálculo, el resultado del sistema es una resta entre una función evaluada en dos números. Por lo tanto **el sistema es estable.**

9. Sea la transformada de Abel de una función $f(r)$:

$$F(y) = 2\int_y^{\infty} \frac{f(r)r\ \mathrm{d}r}{\sqrt{r^2-y^2}}$$

Determine si la transformada de Abel es lineal.

Probamos linealidad primero buscando homogeneidad.

Queremos demostrar que $\text{Abel}\{\alpha f(r)\} = \alpha\text{Abel}\{f(r)\}$. Entonces, probamos tomando transformada de Abel de $\alpha f(r)$:

$$\text{Abel}\{\alpha f(r)\} = 2\int_y^{\infty} \frac{\alpha f(r)r\ \mathrm{d}r}{\sqrt{r^2-y^2}}$$

Por linealidad de la integral se tiene:

$$\text{Abel}\{\alpha f(r)\} = 2\alpha\int_y^{\infty} \frac{f(r)r\ \mathrm{d}r}{\sqrt{r^2-y^2}}$$

Por lo tanto, la transformada de Abel cumple homogeneidad.

Ahora, probamos superposición:

Buscamos la transformada $\text{Abel}\{\alpha f(r) + g(r)\}$:

$$\text{Abel}\{\alpha f(r) + g(r)\} = 2\int_y^{\infty} \frac{(f(r)+g(r))r\ \mathrm{d}r}{\sqrt{r^2-y^2}}$$

Por linealidad de la integral se cumple superposición.

Por lo tanto Abel es un operador lineal.