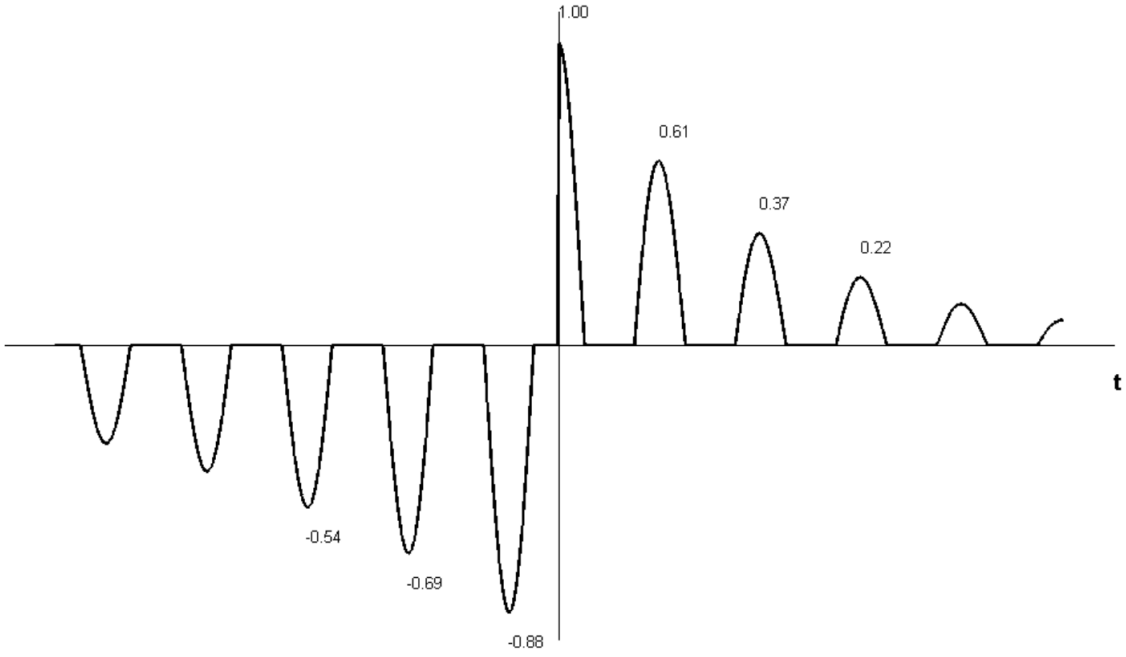
Prueba 3

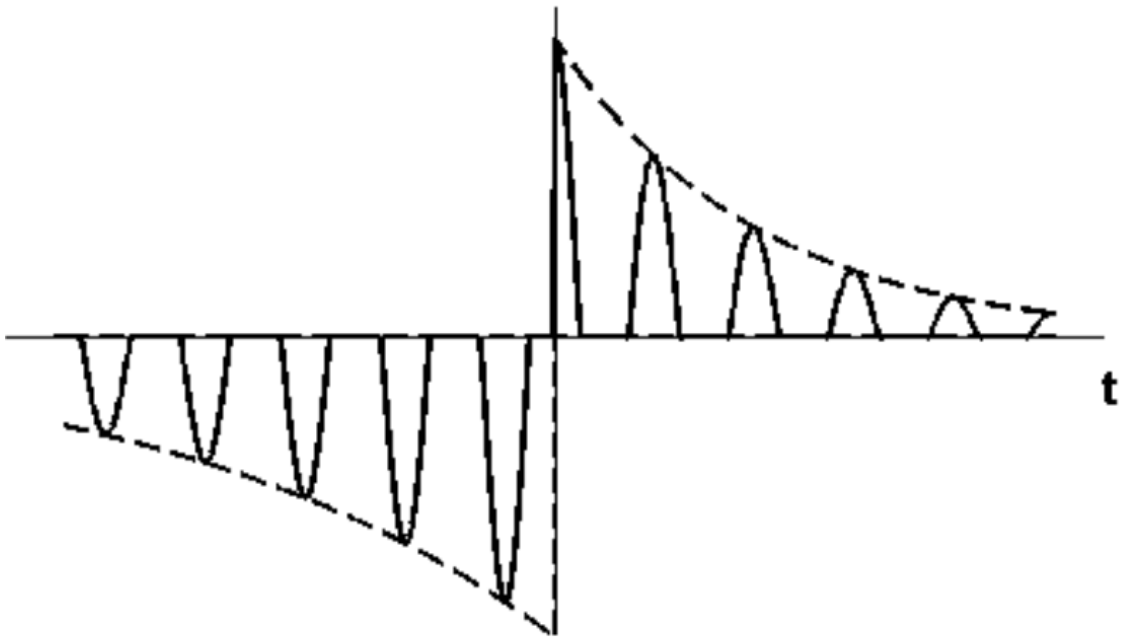
- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Escriba un problema en cada hoja. Debe colocar su nombre en todas las hojas. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. [6 ptos] Encuentre aproximadamente el o los polos de la Transformada de Laplace de la función de la figura.



Resultado: Tanto por el lado derecho como por el izquierdo se puede identificar un decaimiento tipo exponencial, es decir existirá un polo por el lado derecho y otro por el izquierdo.



Para encontrar su ubicación será necesario primero indentificar las constantes de decaimiento. Para eso tenemos las amplitudes de los distintos lóbulos, pero falta saber a qué tiempo corresponde. Aquí será necesario hacer una suposición. Yo voy a suponer que los lóbulos están a distancia 1.

Mirando el lado derecho primero, tenemos que la señal decae de 1.00 a 0.37 en 2 unidades de tiempo. Dado que $e^{-1} \approx 0.37$, tenemos que la constante de tiempo es 2, es decir

$$f_1(t) \approx e^{-t/2} \sqcap (t)$$

Por el lado izquierdo tenemos un decaimiento de 0.88 a 0.54 en 2 unidades de tiempo. Como 0.54/0.88 es aproximadamente 0.61, para decaer al 37% se necesita avanzar otras 2 unidades más. La constante de tiempo es aproximadamente 4.

$$f_2(t) \approx e^{t/4} \sqcap (-t)$$

Directamente vemos que $f_1(t)$ tiene un polo en $-1/2$ y que $f_2(t)$ tiene un polo en $1/4$, que son los dos polos pedidos.

2. [6 ptos] Se tiene un sistema divergente que tiene la función de transferencia $H_1(s) = 1/(s-b)$ con $b > 0$. Alguien propone colocar en cascada el sistema $H_2(s) = s - b$ para cancelar el polo y así obtener un sistema estable $H(s) = 1$. Esta idea en la práctica no es buena porque es muy difícil que el cero y el polo coincidan exactamente. Suponga que se comete un error Δb en el cero, es decir, el cero es $b \pm \Delta b$ en vez de b. Calcule qué valores puede tomar Δb de manera que la respuesta al escalón del sistema compensado con este error no se diferencie en más de un 50% de la respuesta al escalón del sistema estable $H(s) = 1$, en el intervalo de tiempo $0 < t < t_{\max}$.

Resultado: La función de transferencia del sistema total será

$$H(s) = \frac{s - b \pm \Delta b}{s - b} = 1 \pm \frac{\Delta b}{s - b}$$

La respuesta al escalón será la inversa de

$$G(s) = H(s)\frac{1}{s} = \frac{1}{s} \pm \frac{1}{s}\frac{\Delta b}{s - b}$$

que es

$$g(t) = \sqcap(t) \pm \frac{\Delta b}{b}(e^{bt} - 1)$$

Es decir, se debe cumplir

$$\left|\frac{\Delta b}{b}(e^{bt} - 1)\right| < \frac{1}{2}$$

en $0 < t < t_{\max}$. Dado que $b > 0$ porque el sistema original es inestable, el caso límite se dará en $t = t_{\max}$ donde se tendrá que cumplir

$$\frac{\Delta b}{b}(e^{bt_m} - 1) < \frac{1}{2}$$

Es decir,

$$\Delta b < \frac{b}{2(e^{bt_m} - 1)}$$

3. [6 ptos] Un sistema de entrada $f(t)$ y salida $g(t)$ está descrito por la siguiente ecuación diferencial

$$g'''(t) + 6g''(t) + 8g'(t) = f''(t) + 4f'(t) + 3f(t)$$

   (a) [3 ptos] Encuentre $\lim_{t\to\infty} h(t)$ si $h(t)$ es la respuesta al impulso del sistema.

   (b) [3 ptos] Encuentre $h(t)$.

Resultado: El primer paso será encontrar la función de transferencia del sistema, que es

$$H(s) = \frac{s^2 + 4s + 3}{s^3 + 6s^2 + 8s}$$

   (a) Para calcular el valor final de la respuesta al impulso podemos usar el teorema de valor final

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{s\to 0} sH(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s^3 + 4s^2 + 3s}{s^3 + 6s^2 + 8s} = \frac{3}{8}$$

   (b) Para encontrar $h(t)$, podemos usar fracciones parciales

$$H(s) = \frac{s^2 + 4s + 3}{s(s^2 + 6s + 8)} = \frac{s^2 + 4s + 3}{s(s + 2)(s + 4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 2} + \frac{C}{s + 4}$$

$$\frac{s^2 + 4s + 3}{s(s + 2)(s + 4)} = \frac{A(s^2 + 6s + 8) + B(s^2 + 2s) + C(s^2 + 4s)}{s(s + 2)(s + 4)}$$

De donde

$$\begin{aligned} A+B+C &= 1 \\ 6A+2B+4C &= 4 \\ 8A &= 3 \end{aligned}$$

Es decir, $A = 3/8$, $B = 1/4$ y $C = 3/8$.

$$H(s) = \frac{3/8}{s} + \frac{1/4}{s+2} + \frac{3/8}{s+4}$$

y la inversa será,

$$h(t) = \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{3}{8}e^{-4t}\right) \sqcap(t)$$

4. [6 ptos] Se tiene un sistema discreto cuya respuesta al impulso en la posición Δ es

$$h[n,\Delta] = \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-\Delta} \sqcap[n-\Delta]\sqcap[\Delta-1]$$

   (a) [3 ptos] Si la entrada es $f[n] = \sqcap[n-1] - \sqcap[n-4]$, encuentre y grafique la salida.

   (b) [3 ptos] Si la entrada es $f[n] = \sqcap[n-3] - \sqcap[n-6]$, encuentre y grafique la salida.

Resultado: Lo primero que tenemos que tener en cuenta es que el sistema es variante en el tiempo (porque la respuesta al impulso lo es), es decir no podemos usar convolución sino que la sumatoria de superposición. Veamos cómo es la respuesta al impulso para diferentes posiciones Δ.

$$\begin{aligned} \Delta = 1 \quad &\Rightarrow \quad h[n] = (\underline{0},\ 1,\ 1,\ 1,\ 1, \dots) \\ \Delta = 2 \quad &\Rightarrow \quad h[n] = (\underline{0},\ 0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3}, \dots) \\ \Delta = 3 \quad &\Rightarrow \quad h[n] = (\underline{0},\ 0,\ 0,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3^2}, \dots) \\ \Delta = 4 \quad &\Rightarrow \quad h[n] = (\underline{0},\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4^2}, \dots) \\ \Delta = 5 \quad &\Rightarrow \quad h[n] = (\underline{0},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{5^2}, \dots) \end{aligned}$$

(a)

$$\sqcap[n-1] - \sqcap[n-4] = (\underline{0},\ 1,\ 1,\ 1,\ 0, \dots)$$

Es decir, debemos sumar las primeras tres respuestas de la tabla anterior

$$g[n] = (\underline{0},\ 1,\ 1+1,\ 1+\frac{1}{2}+1,\ 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^2}, \dots)$$

El gráfico se obtiene fácilmente de estos valores.

(b) Análogamente

$$\sqcap[n-3] - \sqcap[n-6] = (\underline{0},\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0, \dots)$$

Es decir, debemos sumar las últimas tres respuestas de la tabla anterior

$$g[n] = (\underline{0},\ 0,\ 0,\ 1,\ \frac{1}{3}+1,\ \frac{1}{3^2}+\frac{1}{4}+1,\ \frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5},\ \frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^2}, \dots)$$

El gráfico se obtiene fácilmente de estos valores.

