Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica

IEE 2102 ANALISIS DE SEÑALES 2006-2

INTERROGACION Nº 1

1. Considere el sistema de la figura 1a.

1.1 Obtenga una expresión que relacione la salida $y(t)$ con la entrada $x(t)$.

1.2 Analice cuáles de las siguientes propiedades satisface el sistema: lineal o no lineal; variante o invariante; con o sin memoria; causal o no causal; invertible o no invertible. Justifique en cada caso.

1.3 Grafique la respuesta $y(t)$ si la entrada $x(t)$ corresponde a la mostrada en la figura 1b.

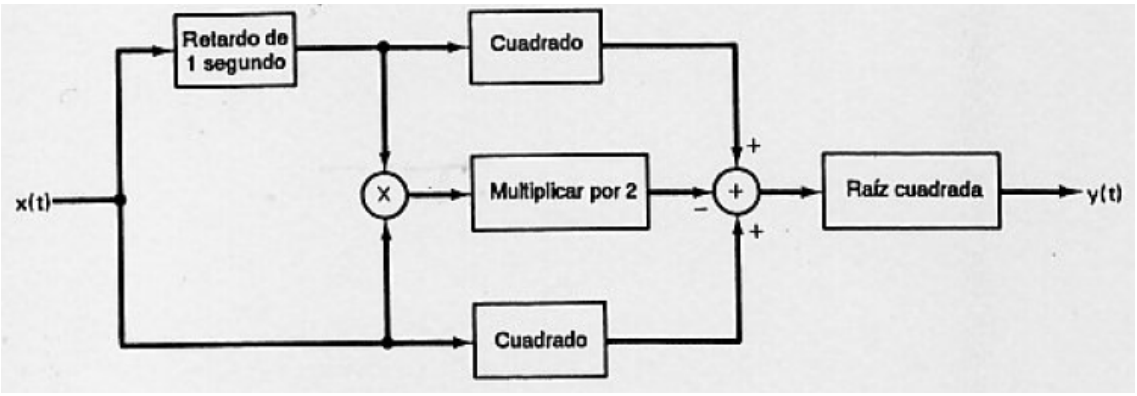


Figura 1a

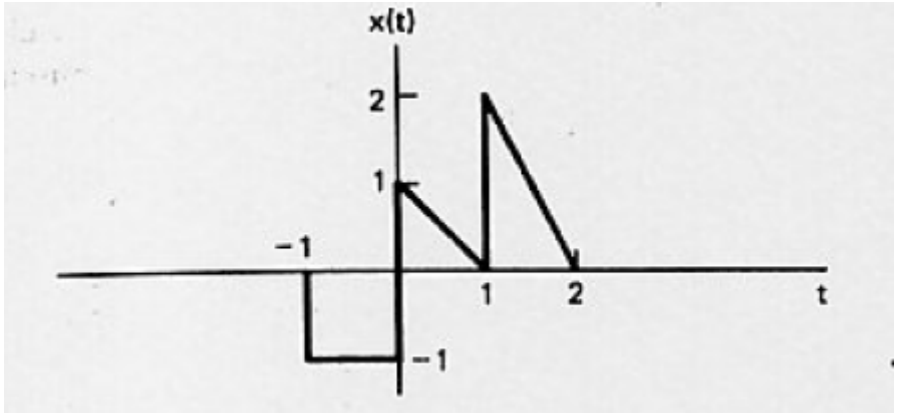


Figura 1b

2. Considere el circuito de la figura 2.

2.1 Seleccione apropiadas variables de estado y formule la ecuación de estado.

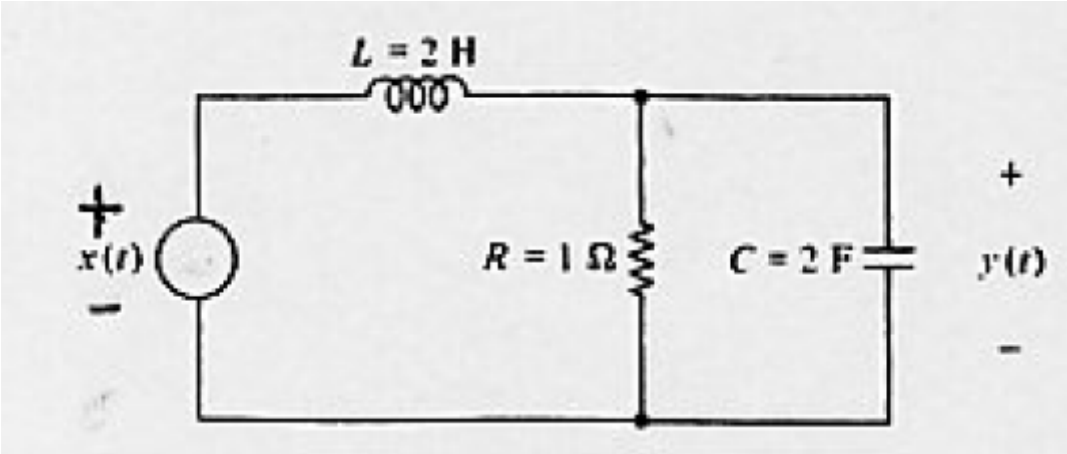
2.2 Dibuje un diagrama en bloques del sistema, que incluya integradores, multiplicadores y sumadores.

2.3 Qué ecuación satisface la matriz transición de estado?

2.4 Deduzca la ecuación diferencial entrada-salida.

2.5 Qué ecuación satisface la función respuesta al impulso?

2.6 Cuál es la expresión general para la salida $y(t)$?



3. Sea $x(t)$ una señal periódica e $y(t) = \alpha + \beta x(\sigma t + \delta)$.

3.1 Si se designa con c_n a los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $x(t)$, y con d_n a los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de $y(t)$, qué relación existe entre d_n y c_n?

3.2 Obtenga una aproximación que incluya hasta el segundo armónico para las señales "onda cuadrada" y "onda rectangular" que se muestran en las figuras 3a y 3b, respectivamente.

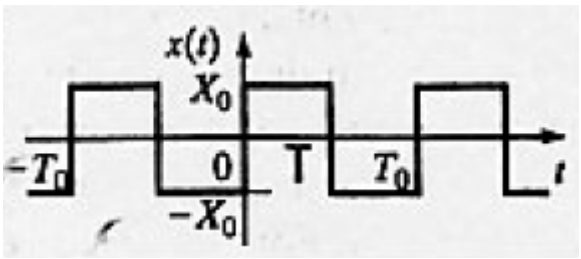


Figura 3a

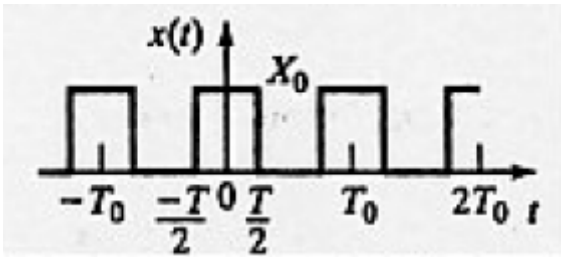


Figura 3b

Observaciones. Tiempo 2 horas. Aclaraciones de enunciado sólo en los primeros 15 minutos. No se permite utilizar apuntes ni calculadora. Respuestas en hojas separadas. No olvide indicar su nombre en cada hoja. Las 3 preguntas tienen igual ponderación.

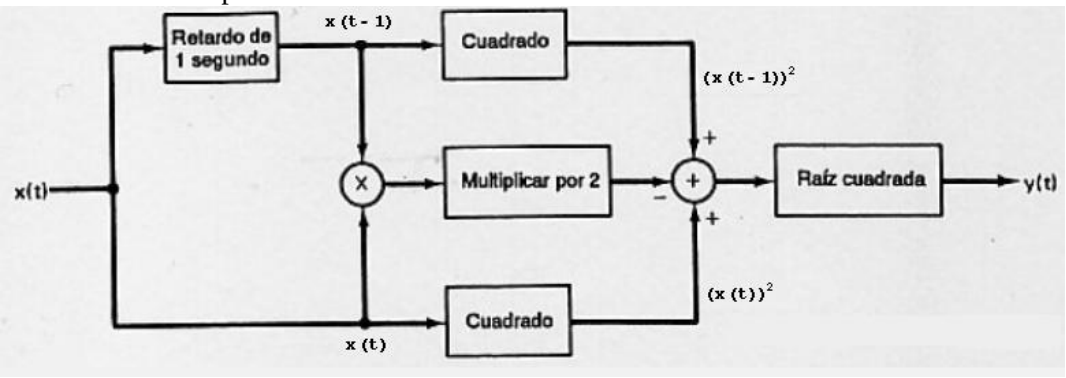
Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ingeniería Eléctrica

IEE 2102 ANALISIS DE SEÑALES 2006-2

PAUTA INTERROGACION N° 1

PREGUNTA 1

1.1 Máximo 2 puntos



$$y(t) = \sqrt{(x(t))^2 - 2x(t)x(t-1) + (x(t-1))^2} = \sqrt{(x(t) - x(t-1))^2} =$$

$$|x(t) - x(t-1)| = \begin{cases} x(t) - x(t-1) & si \;\; x(t) \geq x(t-1) \\ x(t-1) - x(t) & si \;\; x(t) < x(t-1) \end{cases}$$

1.2 Máximo 2 puntos

(a) Linealidad

$|\alpha x(t) - \alpha x(t-1)| = |\alpha||x(t) - x(t-1)| \neq \alpha|x(t) - x(t-1)|$ No Lineal

(b) Variabilidad en el tiempo

$|x(t-t_0) - x(t-t_0-1)| = y(t-t_0)$ Invariante

(c) Memoria y causalidad

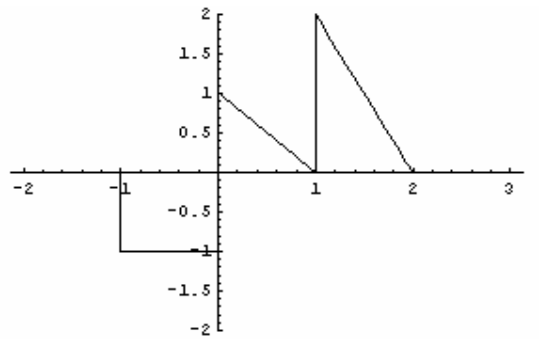
Es causal y con memoria ya que $y(t)$ depende de $x(t-1)$

(d) Invertibilidad

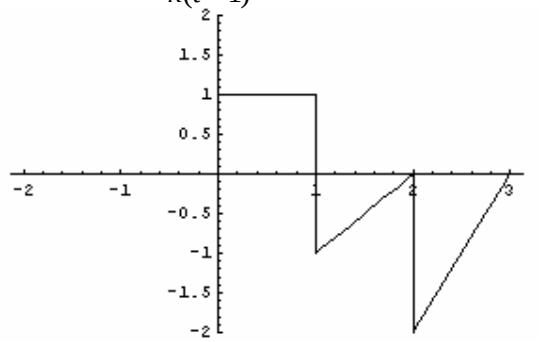
El sistema en no invertible ya que no existe una función inversa a la de modulo.

1.3 Máximo 2 puntos

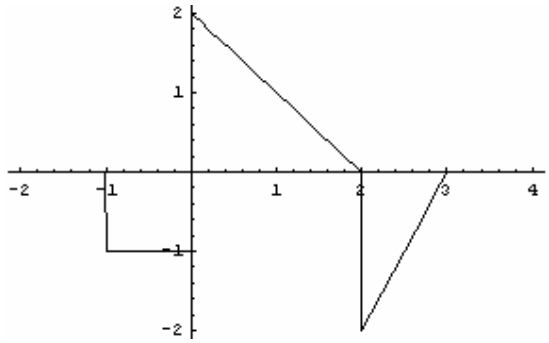
$x(t)$



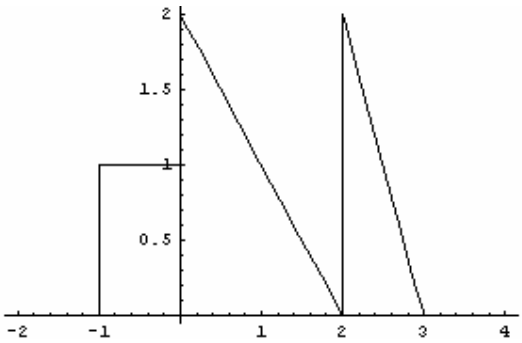
$-x(t-1)$



$x(t)-x(t-1)$



$y(t)=|x(t)-x(t-1)|$



PREGUNTA 2

2.1 Máximo 2 puntos

Alternativa 1:

Elegimos como variables de estado el voltaje en el condensador y la corriente en la inductancia:

$$v_1(t) = V_c(t) = \mathrm{y}(t)$$
$$v_2(t) = i_l(t)$$

Aplicamos las leyes de Kirchoff para encontrar las expresiones para las variables de estado:

LKV:

$$V_l(t) + V_c(t) = \mathrm{x}(t)$$
$$L\left(\frac{d}{dt} i_l(t)\right) + V_c(t) = \mathrm{x}(t)$$
$$L\left(\frac{d}{dt} v_2(t)\right) + v_1(t) = \mathrm{x}(t)$$

Despejando la derivada:

$$\frac{d}{dt} v_2(t) = -\frac{v_1(t)}{L} + \frac{\mathrm{x}(t)}{L}$$

LKC:

$$i_l(t) = i_r(t) + i_c(t)$$
$$i_l(t) = \frac{V_c(t)}{R} + C\left(\frac{d}{dt} V_c(t)\right)$$
$$v_2(t) = \frac{v_1(t)}{R} + C\left(\frac{d}{dt} v_1(t)\right)$$
$$\frac{d}{dt} v_1(t) = -\frac{v_1(t)}{RC} + \frac{v_2(t)}{C}$$

Traspasando a matrices:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} v_1(t) \\ \frac{d}{dt} v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \mathrm{x}(t)$$

$$\mathrm{y(t)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$$

Se cumple:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

$$c = [1 \quad 0]\,; \qquad d = 0$$

Alternativa 2:

Se eligen como variables de estado el voltaje en el condensador y a su variación:

$$v_1(t) = V_c(t) = \mathrm{y}(t)$$
$$v_2(t) = \frac{d}{dt} V_c(t) = \frac{d}{dt} \mathrm{y}(t)$$

Aplicando la LKC:

$$i_c(t) + i_r(t) = i_l(t)$$
$$C\left(\frac{d}{dt} V_c(t)\right) + \frac{V_c(t)}{R} = i_l(t)$$
$$C\, v_2(t) + \frac{v_1(t)}{R} = i_l(t)$$

LKV:

$$V_l(t) + V_c(t) = \mathrm{x}(t)$$
$$L\left(\frac{d}{dt} i_l(t)\right) + V_c(t) = \mathrm{x}(t)$$
$$L\left(C\left(\frac{d}{dt} v_2(t)\right) + \frac{1\left(\frac{d}{dt} v_1(t)\right)}{R}\right) + v_1(t) = \mathrm{x}(t)$$
$$LC\left(\frac{d}{dt} v_2(t)\right) + \frac{L\, v_2(t)}{R} + v_1(t) = \mathrm{x}(t)$$
$$\left(\frac{d}{dt} v_2(t)\right) + \frac{v_2(t)}{RC} + \frac{v_1(t)}{LC} = \frac{\mathrm{x}(t)}{LC}$$

Por lo tanto, despejando $\frac{d}{dt} v_2(t)$

$$\frac{d}{dt} v_2(t) = -\frac{v_2(t)}{RC} - \frac{v_1(t)}{LC} + \frac{\mathrm{x}(t)}{LC}$$

Lo que en matrices es:

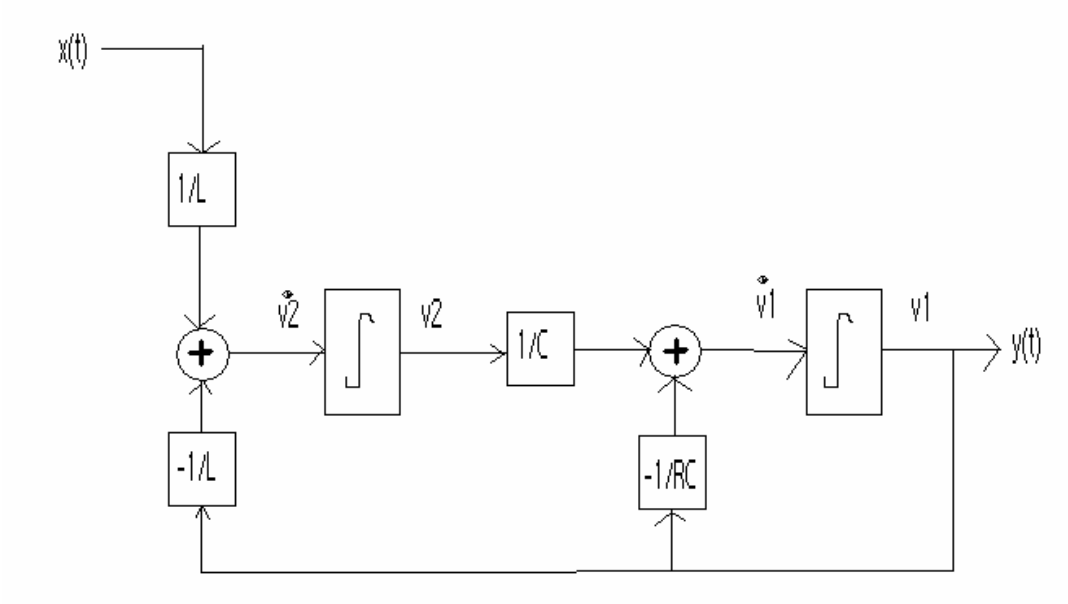
$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} v_1(t) \\ \frac{d}{dt} v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} \mathrm{x}(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$$

2.2 Máximo 1 punto

Alternativa 1:

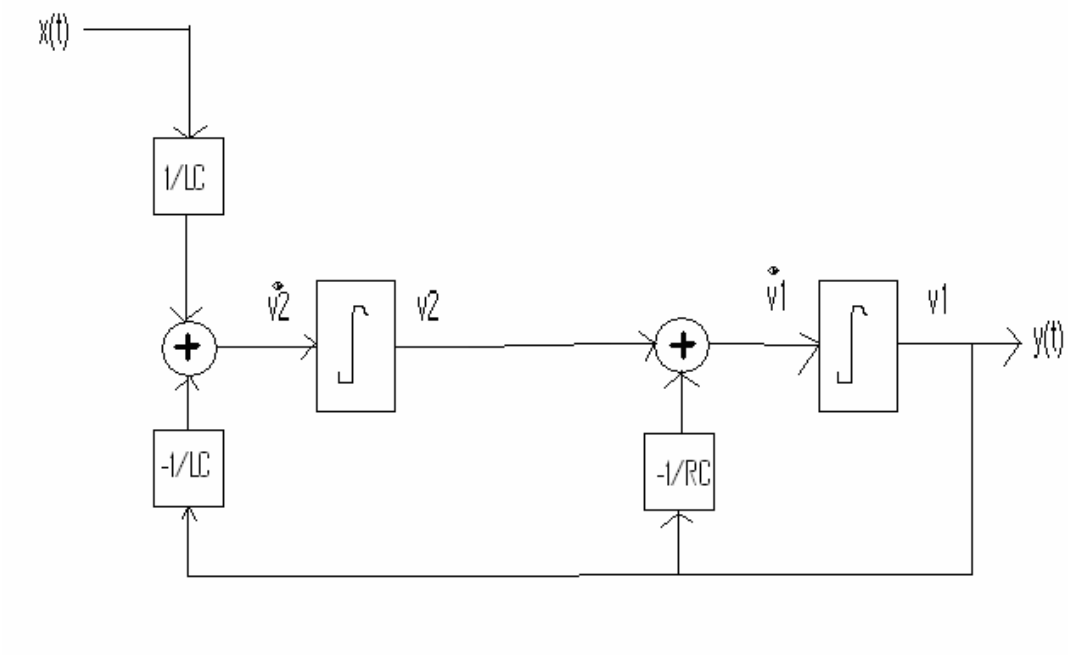
Es casi igual a la primera forma canónica, solamente que a la salida del primer integrador se multiplica por 1/C



Alternativa 2:

Se puede hacer cualquiera de las formas canónicas.

Primera forma canónica:



2.3 Máximo 0.6 puntos

La matriz de transición de estado debe satisfacer:

La matriz de transición de estado debe satisfacer la ecuación:

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = A\,\Phi(t)$$

$$\Phi(0^-) = I$$

Para la alternativa 1:

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}\Phi(t)$$

$$\Phi(0^-) = I$$

2.4 Máximo 1 punto

De la ecuación de mallas:

$$V_l(t) + V_c(t) = \mathrm{x}(t)$$

$$L\left(\frac{d}{dt}\,i_l(t)\right) + V_c(t) = \mathrm{x}(t)$$

$$L\left(\frac{\frac{d}{dt}\mathrm{y}(t)}{R}+C\left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{y}(t)\right)\right)+\mathrm{y}(t)=\mathrm{x}(t)$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{y}(t)\right)+\frac{\frac{d}{dt}\mathrm{y}(t)}{RC}+\frac{\mathrm{y}(t)}{LC}=\frac{\mathrm{x}(t)}{LC}$$

2.5 Máximo 0.6 puntos

Satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2}{dt^2}h(t)+\frac{1}{RC}\frac{d}{dt}h(t)+\frac{1}{LC}h(t)=\delta(t)$$
$$h(0^-)=0$$
$$\frac{dh}{dt}(0^-)=0$$

2.6 Máximo: 0.8 puntos

La solución general es:

$$y(t)=c\Phi(t)v(0^-)+\int_{0-}^{t}c\Phi(t-\tau)bx(\tau)d\tau$$

Los valores de *c*, *b* y la matriz transición de estado son los obtenidos previamente. v(0-) es el vector de condiciones iniciales del circuito.

PREGUNTA 3

3.1 Máximo 2 puntos

Primero se expresa y(t) como:

$$y(t) = \alpha + \beta x(\sigma(t + \frac{\delta}{\sigma})$$

Luego, aplicando las propiedades de las series de Fourier tenemos que:

- Si c_n son los coeficientes de $x(t)$, entonces βc_n serán los coeficientes de $\beta x(t)$.

- El desplazamiento será de δ/σ, reflejándose en los coeficientes como:

$$c_n \rightarrow c_n * e^{j\omega_0 n\frac{\delta}{\sigma}}$$

- El efecto de σ en $x(\sigma t)$equivale a reemplazar t por σt en la integral del calculo de los coeficientes de Fourier, y a cambiar el periodo a T/σ, o equivalentemente la frecuencia de la señal a $\sigma\omega_0$.

- Finalmente el efecto del factor α se refleja en $\boldsymbol{d_0}$, y no afecta a el resto de los $\boldsymbol{d_n}$.

Integrando todo lo anterior se obtiene:

$$d_0 = \alpha + \beta c_0$$
$$d_n = \beta c_n e^{jn\omega_0\frac{\delta}{\sigma}} \text{ para } n \neq 0$$

<u>Asignación de puntajes:</u> Se asignó 0.5 puntos por tener correcto el efecto que produce α, β, σ, y δ por separado.

3.2 Máximo 4 puntos

Para aplicar el resultado de 3.1, lo primero es asociar $y(t)$ (figura b) con $x(t)$ (figura 3a). Se cumple:

$$y(t) = X_0/2 + 0.5 * x(t + T/2)$$

Para hacer uso de lo obtenido en la primera parte, se cumple:

- $\alpha = X_0/2$
- $\beta = 0.5$
- $\sigma = 1$
- $\delta = T/2$

En ambos casos el periodo corresponde a T_0.

Luego se calculan los coeficientes de Fourier c_0, c_1, c_2 para $x(t)$.
Se cumple:

$$c_n = \frac{1}{T_0}\left[\int_{-T}^{0} -X_0 e^{-\frac{j2\pi nt}{T_0}}\,dt + \int_{0}^{T} X_0 e^{-\frac{j2\pi nt}{T_0}}\,dt\right]$$

$$c_n = \frac{jX_0}{2\pi n}\left[e^{\frac{2j\pi nT}{T_0}} + e^{\frac{-2j\pi nT}{T_0}} - 2\right]$$

Como la función es impar, $c_0 = 0$ ya que la componente continua es cero.

Luego,

$$c_0 = 0$$

$$c_1 = \frac{jX_0}{2\pi}\left[e^{\frac{2j\pi T}{T_0}} + e^{\frac{-2j\pi T}{T_0}} - 2\right]$$

$$c_{-1} = \frac{-jX_0}{2\pi}\left[e^{\frac{-2j\pi T}{T_0}} + e^{\frac{2j\pi T}{T_0}} - 2\right]$$

$$c_2 = 0$$

$$c_{-2} = 0$$

De aquí:

$$x_{aprox}(t) = \frac{jX_0}{2\pi}\left[e^{\frac{2j\pi T}{T_0}} + e^{\frac{-2j\pi T}{T_0}} - 2\right]\cdot e^{\frac{2\pi t}{T_0}} + \frac{-jX_0}{2\pi}\left[e^{\frac{-2j\pi T}{T_0}} + e^{\frac{2j\pi T}{T_0}} - 2\right]\cdot e^{\frac{-2\pi t}{T_0}}$$

Aplicando el resultado de 3.1, se obtienen los coeficientes d_0, d_1, d_2 del desarrollo en serie de Fourier de $x_2(t)$:

$$d_0 = \frac{X_0}{2}$$

$$d_1 = \frac{jX_0}{4\pi}\left[e^{\frac{2j\pi T}{T_0}} + e^{\frac{-2j\pi T}{T_0}} - 2\right]\cdot e^{\frac{j\pi T}{T_0}}$$

$$d_{-1} = \frac{-jX_0}{2\pi}\left[e^{\frac{-2j\pi T}{T_0}} + e^{\frac{2j\pi T}{T_0}} - 2\right]\cdot e^{\frac{-j\pi T}{T_0}}$$

$$d_2 = d_{-2} = 0$$

Finalmente:

$$x_{aprox}(t) = \frac{X_0}{2} + \frac{jX_0}{4\pi}\left[e^{\frac{2j\pi T}{T_0}} + e^{\frac{-2j\pi T}{T_0}} - 2\right]\cdot e^{\frac{j\pi T}{T_0}}\cdot e^{\frac{2\pi t}{T_0}} + \frac{-jX_0}{2\pi}\left[e^{\frac{-2j\pi T}{T_0}} + e^{\frac{2j\pi T}{T_0}} - 2\right]\cdot e^{\frac{-j\pi T}{T_0}}\cdot e^{\frac{-2\pi t}{T_0}}$$

<u>Asignación de puntajes:</u>

Si se realizó el ejercicio de acuerdo a la pauta, se asignó:

- 2.5 puntos por encontrar los coeficientes y la aproximación de x(t).
- 0.5 puntos por tener la relación entre las dos señales correcta.
- 1 punto por los coeficientes y la aproximación de la segunda señal.

Si se calculó por separado cada señal, sin prestar atención a la relación entre ellas, se asignó 2 puntos por el cálculo de los coeficientes de cada señal y su aproximación por separado, desglosándose en:

- 0.5 puntos por c_0
- 0.5 puntos por c_1 y c_{-1}
- 0.5 puntos por c_2 y c_{-2}
- 0.5 puntos por la ecuación de cada señal aproximada.

Para aquellos que calcularon los coeficientes a_n y b_n de cada señal, se debían cumplir las propiedades que relacionan estos con los c_n para comprobar si están o no correctos.

También se consideró correcto a aquellos que usaron el supuesto de $2T = T_0$.