IEE2103 - SEÑALES Y SISTEMAS
Examen
Prof. Rodrigo F. Cádiz

2do. semestre 2019
Tiempo: 2 hrs.
Puntos: 30
Fecha: 19/12/2019

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo ocho carillas de apuntes (dos por interrogación).
- Responda cada pregunta en hojas separadas, dentro del recuadro. Puede responder por ambos lados. Debe colocar su nombre, rut, número de interrogación y número de pregunta en todas las hojas que ocupe. Las hojas sin esta información no serán corregidas.
- Si no contesta la pregunta, por favor igual entregue la hoja en blanco con el número de pregunta señalado.

1. (3 pts.) Determine una expresión en Series de Fourier de

$$f(x) = \sin^2(x)$$

Solución

Nos interesa escribir $f(x)$ como una Serie de Fourier, es decir:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi kx/T}$$

Utilizando la identidad de Euler podemos escribir $f(x)$ como

$$f(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{i2x} - 2 + e^{-i2x}}{4i^2} = -\frac{1}{4}e^{-i2\pi x/\pi} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{i2\pi x/\pi} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Por lo que vemos que los coeficientes son simplemente

$$c_{-1} = -\frac{1}{4}, \quad c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_1 = -\frac{1}{4} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Todos los otros coeficientes son cero $\rightarrow$ **1 pt.** y el período de la señal es π.

2. (3 pts.) Considere un sistema continuo cuya respuesta de frecuencia está dada por:

$$H(u) = \begin{cases} e^{-i(\pi/2)} & u > 0 \\ e^{i(\pi/2)} & u < 0 \end{cases}$$

Encuentre la respuesta al impulso $h(t)$ del sistema.

Por favor mire la página siguiente ...

Solución

Observamos que $e^{-i(\pi/2)} = -i$ y $e^{i(\pi/2)} = i$, por lo que

$$H(u) = -i\,\mathrm{sgn}(u) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Vemos que lo que el sistema hace es desfasar una señal en -90 grados, por lo que se conoce como un phase shifter en inglés, o desplazador de fase. También se conoce como la Transformada Hilbert.

Considerando el par de Fourier

$$\mathrm{sgn}(x) \rightarrow \frac{1}{i\pi u}$$

podemos obtener el par inverso, mediante la fórmula de inversión o dualidad:

$$\frac{1}{i\pi t} \rightarrow -\mathrm{sgn}(u) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

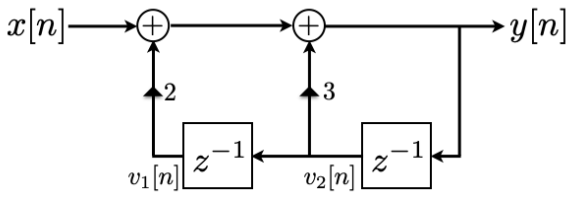
Y multiplicando por i:

$$\frac{1}{\pi t} \rightarrow -i\,\mathrm{sgn}(u)$$

Por lo que la respuesta al impulso es

$$h(t) = \frac{1}{\pi t} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

3. (3 pts.) Determine una representación en variables de estado del sistema discreto determinado por la siguiente figura. Escoja la salida de los retrasos unitarios $v_1[n]$ y $v_2[n]$ como las variables de estado.



Solución

De acuerdo al diagrama, podemos escribir las siguientes relaciones:

$$y[n] = x[n] + 2v_1[n] + 3v_2[n]$$

$$v_2[n+1] = y[n]$$

$$v_1[n+1] = v_2[n]$$

→ **1 pt.**

Agrupando estas ecuaciones, tenemos las ecuaciones de estado

$$v_1[n+1] = v_2[n]$$

$$v_2[n+1] = 2v_1[n] + 3v_2[n] + x[n]$$

Es decir

$$\mathbf{v}[n+1] = \begin{bmatrix} v_1[n+1] \\ v_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Y la ecuación de salida es:

$$y[n] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \end{bmatrix} + x[n] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Por lo tanto, las matrices de estado son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$d = 1$$

4. (3 pts.) La respuesta al escalón de un sistema LTI es $g(t) = 2e^{-3t}\sqcap(t)$. Encuentre la respuesta al impulso del sistema.

Solución

Tomando Transformada de Laplace unilateral de la respuesta al escalón:

$$G(s) = \frac{2}{s+3}, \quad \mathbb{R}\text{e}(s) > -3 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Sabemos, además, que la Transformada de Laplace del escalón es $1/s$. Entonces, podemos escribir la función de transferencia del sistema como

$$H(s) = \frac{G(s)}{\frac{1}{s}} = \frac{2s}{s+3}, \quad \mathbb{R}\text{e}(s) > -3 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Para encontrar la inversa, podemos escribir

$$H(s) = \frac{2s}{s+3} = 2 - \frac{6}{s+3}$$

Utilizando pares conocidos de Laplace es trivial encontrar la inversa:

$$h(t) = 2\delta - 6e^{-3t}\sqcap(t) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

5. (3 pts.) Resuelva la siguiente ecuación para $f(x)$:

$$f(x) = \sin x + 2\int_0^x \cos(x-t)f(t)dt$$

Solución

Vemos que

$$f(x) = \sin(x) + 2\cos(x) * f(x) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Tomando Transformada de Laplace:

$$F(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{2s}{s^2+1}F(s)$$

Despejando $F(s)$ obtenemos

$$F(s) = \frac{1}{(s-1)^2} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Esta función tiene un polo doble en $s = 1$, por lo que podemos utilizar el Teorema de los residuos de Cauchy para encontrar la inversa, considerando la función

$$e^{sx}\frac{1}{(s-1)^2}$$

El residuo es

$$\lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}\{e^{sx}\frac{1}{(s-1)^2}(s-1)^2\} = \lim_{s\to 1} xe^{sx}$$

por lo que:

$$f(x) = xe^x \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

6. (3 pts.) Determine una señal continua que al ser muestreada con un período de muestreo $T = 1$ seg, produzca la Transformada Z:

$$F(z) = \frac{1}{z^2(z-1)^2}$$

Solución

Notamos que:

$$F(z) = \frac{1}{z^2(z-1)^2} = z^{-3}\frac{z}{(z-1)^2} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Partiendo del par

$$n\sqcap[n] \rightarrow \frac{z}{(z-1)^2}$$

Entonces la inversa es simplemente la función anterior desplazada en 3:

$$f[n] = (n-3)\sqcap[n-3] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Por lo tanto, la señal continua debe ser:

$$f(t) = (t-3)\sqcap(t-3) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

7. (3 pts.) Pruebe que una señal de duración limitada en el tiempo no puede ser de ancho de banda limitado en frecuencia al mismo tiempo.

Solución

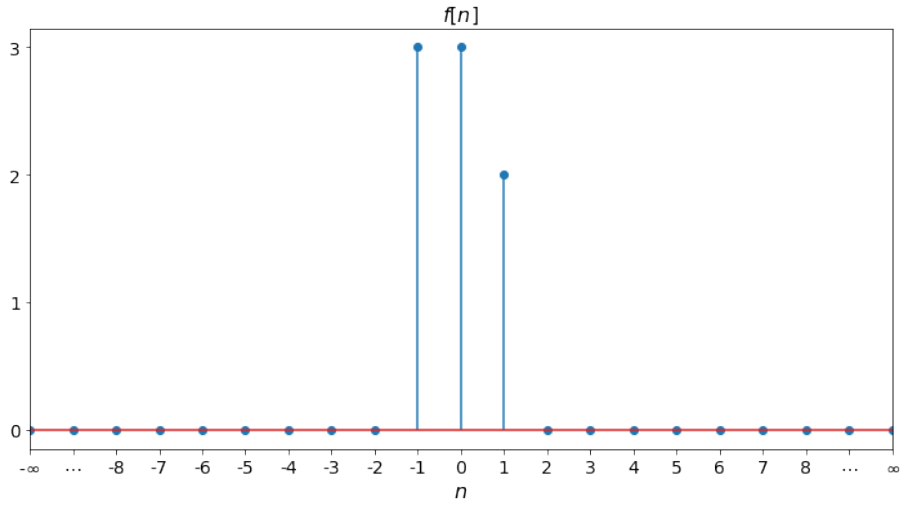
La prueba es por contradicción. Supongamos que $F(u)$ es de ancho de banda limitado para $|u| > B/2$, con $B > 0$. Esto implica que debe cumplirse, para $C > B$:

$$F(u) = F(u)\sqcap(\frac{u}{C}) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Esto implica que $f(t) = f(t) * C\,\mathrm{sinc}\,(Ct)$ $\rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$, lo que necesariamente implica que $f(t)$ es de duración infinita en el tiempo, porque está convolucionada con un sinc que es de duración infinita $\rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$

8. (3 pts.) Encuentre la DTFT y la DFT de largo 3 de la secuencia discreta $f[n]$ especificada por la siguiente figura. Verifique que los valores de la DFT sean efectivamente las muestras de la DTFT.

La pregunta 8 continúa en la página siguiente ...



Solución

Es importante no olvidar que la DFT "ve" una versión periodizada de la secuencia original, en este caso de largo 3. Es decir, la DFT ve la secuencia periódica

$$\tilde{f}[n] = \{\ldots, 3, 2, 3, 3, 2, 3, \underline{3}, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 3, \ldots\}$$

Por lo que la DFT es simplemente:

$$\tilde{F}[k] = \frac{1}{3}\{3 + 2e^{-i2\pi k/3} + 3e^{-i2\pi 2k/3}\} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Entonces podemos calcular los coeficientes directamente de la ecuación anterior

$$F[0] = \frac{3+2+3}{3} = \frac{8}{3}$$

$$F[1] = \frac{3 + 2e^{-i2\pi/3} + 3e^{-i4\pi/3}}{3} = \frac{1}{3}e^{i\pi/3}$$

$$F[2] = \frac{3 + 2e^{-i4\pi/3} + 3e^{-i8\pi/3}}{3} = \frac{1}{3}e^{-i\pi/3}$$

La DTFT es

$$\tilde{F}(u) = 3e^{i2\pi uT} + 3 + 2e^{-i2\pi uT}$$

Recordamos que la DFT es la DTFT muestreada en el círculo unitario. Como es de largo 3, hay que muestrearla en los ángulos 0, $\frac{1}{3T}$, $\frac{2}{3T}$ $\rightarrow$ $\boxed{\textbf{1 pt.}}$

Entonces

$$F(u)\Big|_{u=0} = 3+3+2 = 8$$

$$F(u)\Big|_{u=\frac{1}{3T}} = 3e^{i2\pi/3} + 3 + 2e^{-i2\pi/3} = e^{i\pi/3}$$

$$F(u)\Big|_{u=\frac{2}{3T}} = 3e^{i4\pi/3} + 3 + 2e^{-i4\pi/3} = e^{-i\pi/3}$$

Comprobamos que la DFT es realmente un muestreo de la DTFT → **1 pt.** Solo falta compensar por el factor $\frac{1}{3}$ que aparece dada la definición de la DFT que utilizamos en el curso.

9. (3 pts.) Sea la transformada Wavelet de una señal 1D definida por

$$\mathcal{W}f\,(u,s) = \delta\,(u-1/2)\,\delta\,(s-1) + \sqrt{2}\delta\,(u)\,\delta\,(s-2)\,.$$

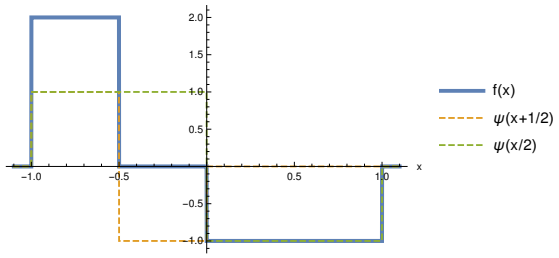
Si la base es la Wavelet de Haar, con $\psi\,(x) = \sqcap\left(2x-\frac{1}{2}\right) - \sqcap\left(2x+\frac{1}{2}\right)$. Encuentre $f\,(x)$ y grafíquelo.

Solución

Primero vemos que la transformada inversa será

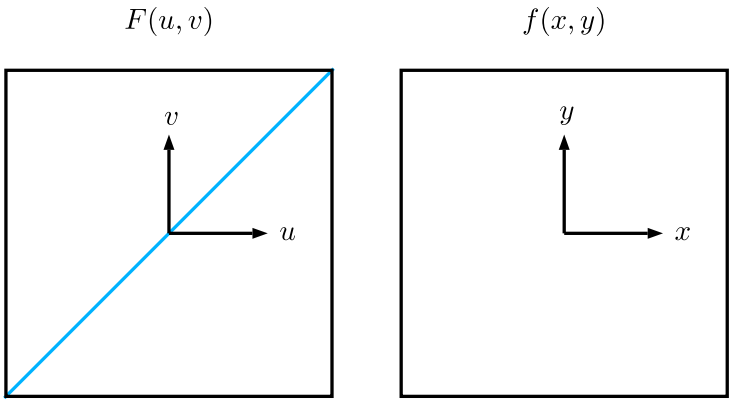
$$\begin{aligned} f\,(x) &= 1\cdot\frac{1}{1}\psi\left(\frac{x+1/2}{1}\right) + \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\psi\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \psi\,(x+1/2) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}} \end{aligned}$$

Luego su gráfico es → **2 pts.** :



10. (3 pts.) En el recuadro izquierdo se tiene la transformada de Fourier 2D de una señal $f\,(x,y)$. Suponiendo que la linea en el dibujo es un impulso de línea, dibuje como debiera ser $f\,(x,y)$. Utilice como guía el recuadro derecho.

La pregunta 10 continúa en la página siguiente ...

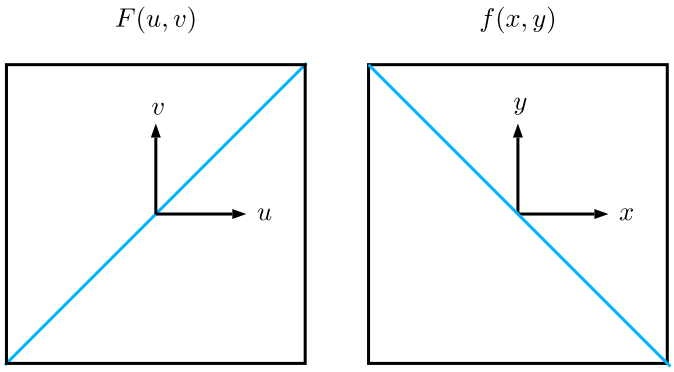


Solución

Definimos el impulso de línea que pasa por el centro y paralelo al eje-u como

$$G(u,v) = 1(u)\,\delta(v) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Luego, su transformada inversa es $g(x,y) = \delta(x)\,1(y) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$ (recta perpendicular). Como $G(u,v)$ y $F(u,v)$ están relacionadas por una rotación en 45 grados $\rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$, por propiedad de rotación en Fourier 2D se tendrá:



Analíticamente estas señales se pueden escribir como $F(u,v) = \delta(x-y)$ y $f(x,y) = \delta(x+y)$.