Interrogación 3

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo tres hojas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre en todas las hojas que ocupe. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. (10 pts.) **Transformada Z**

   (a) (5 pts.) La secuencia de Fibonacci es una secuencia derecha muy utilizada en las artes y presente de muchas formas en la naturaleza. Se define como 1 para los dos primeros términos y los restantes se calculan mediante la suma de los dos términos anteriores. Es decir $f[0] = f[1] = 1$, y $f[n+2] = f[n+1] + f[n]$. Encuentre el término general $f[n]$ de la serie de Fibonacci.

   (b) (5 pts.) Encuentre la Transformada Z y la región de convergencia de $x[n] = a^{\lfloor n/3 \rfloor} \sqcap[n]$, donde a es un número real positivo, y $\lfloor n/3 \rfloor$ representa el número entero más grande tal que es $\leq n/3$.

Solución:

(a) Podemos utilizar la transformada Z unilateral para resolver el problema. La ecuación de diferencias en el dominio Z queda

$$z^2F(z) - z^2f[1] - zf[0] = zF(z) - zf[0] + F(z) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Agrupando,

$$(z^2 - z - 1)F(z) = z^2f[0] - zf[0] + zf[1] = z^2$$

$$F(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1} = \frac{z^2}{\left(z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}$$

Expandiendo en fracciones parciales

$$F(z) = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{z}{z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right) + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{z}{z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right) \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Tomando la transformada inversa, se obtiene

$$f[n] = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

(b) La transformada Z de $x[n]$ es

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n>0 \text{ y divisible por } 3} (a^{n/3}z^{-n} + a^{n/3}z^{-n-1} + a^{n/3}z^{-n-2}) \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Usando el cambio de variables $m = 3n$,

$$X(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a^m z^{-3m}(1 + z^{-1} + z^{-2}) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2}}{1 - az^{-3}} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Esta suma converge si y solo si $|az^{-3}| < 1$, es decir, la ROC es $|z| > |\sqrt[3]{a}| \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$.

2. (10 pts.) **Transformada de Laplace**

(a) (6 pts.) Sea f una función periódica de período τ. Demuestre que su Transformada de Laplace viene dada por

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-\tau s}} \int_0^{\tau} f(t)e^{-st}dt$$

Determine su región de convergencia y verifique su resultado para $f(t) = \sin(t)$.

(b) (4 pts.) Calcule la transformada de Laplace de $f(t) = \sqcup\!\sqcup(t)$ y determine su región de convergencia. Justifique sus resultados.

Solución:

(a) La expresión $1/(1-e^{-\tau s})$ bien sugiere la presencia de una serie geométrica en infinito. Es decir, debemos lograr expresar la integral de Laplace como una sumatoria. Observe que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-st}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} f(t)\, e^{-st}dt \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Para dejar la integral de 0 a τ, hacemos la sustitución $u = t - n\tau$, de modo que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-st}dt &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\tau} f(u + n\tau)\, e^{-su}e^{-sn\tau}du \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-sn\tau} \int_0^{\tau} f(u + n\tau)\, e^{-su}du \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}} \end{aligned}$$

Como $f(u + n\tau) = f(u)$ por periodicidad, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-sn\tau} \right) \int_{0}^{\tau} f(t)\, e^{-st} dt \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Para continuar de aquí en adelante se requería una suposición, ya que la serie expresada solo converge para $\mathrm{Re}\{s\} = 0 \rightarrow$ **1 pts.**, el caso de la transformada de Fourier. Por lo tanto, podemos asumir que estamos trabajando con la transformada de Laplace unilateral, y calculamos el resultado de esta forma. Es decir,

$$\int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn\tau} \right) \int_{0}^{\tau} f(t)\, e^{-st} dt$$

Luego, la serie es una serie geométrica de término $e^{-s\tau}$, de modo que podemos calcularla inmediatamente. Observamos que el resultado solo se cumple para $\mathrm{Re}\{s\} > 0$. Es decir,

$$\boxed{\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt = \frac{1}{1 - e^{-\tau s}} \int_{0}^{\tau} f(t)\, e^{-st} dt} \quad \text{con } \mathrm{Re}\{s\} > 0 \blacksquare \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Nota: Para quienes notaran el error o algún problema en ello, pero no pudiesen llegar a la solución, tendrán la mayoría del puntaje de todas formas, a discreción del corrector.

La verificación para el caso de $\sin(t)$ es entonces extremadamente sencilla, donde $\tau = 2\pi$:

$$\mathcal{L}\{\sin(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_{0}^{2\pi} \sin(t)\, e^{-st} dt$$

La integral es clásica de los cursos de cálculo, y puede integrarse cuidadosamente por integración por partes (dos veces), obteniendo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin(t)\} &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \cdot \frac{\left(1 - e^{-2\pi s}\right)}{s^2 + 1} \\ &= \frac{1}{s^2 + 1} \quad \text{con } \mathrm{Re}\{s\} > 0 \end{aligned}$$

lo cual comprueba todo lo que ya sabíamos sobre esta transformada de Laplace. $\rightarrow$ **1 pts.**

(b) Observe que shah en este caso es un función períodica de periodo 1. Por propiedad del cedazo se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{a} \delta(t)\, dt = \begin{cases} 1 & \text{si } a \geq 0 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

de modo que aplicamos esta propiedad junto a la anterior para obtener la transformada de shah:

$$\mathcal{L}\{\sqcup\!\sqcup(t)\sqcap(t)\} = \frac{1}{1-e^{-s}}\int_0^1 \sqcup\!\sqcup(t)\,e^{-st}dt$$

Los únicos impulsos del shah que existen dentro de la integral son $\delta(t)$ y $\delta(t-1)$, de modo que

$$\mathcal{L}\{\sqcup\!\sqcup(t)\sqcap(t)\} = \frac{1}{1-e^{-s}}\left(\int_0^1 \delta(t)\,e^{-st}dt + \int_0^1 \delta(t-1)\,e^{-st}dt\right) \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Aplicando propiedad del cedazo:

$$\mathcal{L}\{\sqcup\!\sqcup(t)\sqcap(t)\} = \frac{1}{1-e^{-s}}\left(1+e^{-s}\right) \quad \text{con}\,\mathrm{Re}\{s\}>0 \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Observe que $\coth(s) = \dfrac{e^s+e^{-s}}{e^s-e^{-s}} = \dfrac{1+e^{-2s}}{1-e^{-2s}}$, con lo cual concluimos que:

$$\boxed{\mathcal{L}\{\sqcup\!\sqcup(t)\sqcap(t)\} = \coth\left(\frac{s}{2}\right)} \quad \text{con}\,\mathrm{Re}\{s\}>0$$

donde la ROC se obtiene de la ROC que se obtiene al demostrar la propiedad de la transformada para una función periódica. Es la condición de convergencia de la serie.

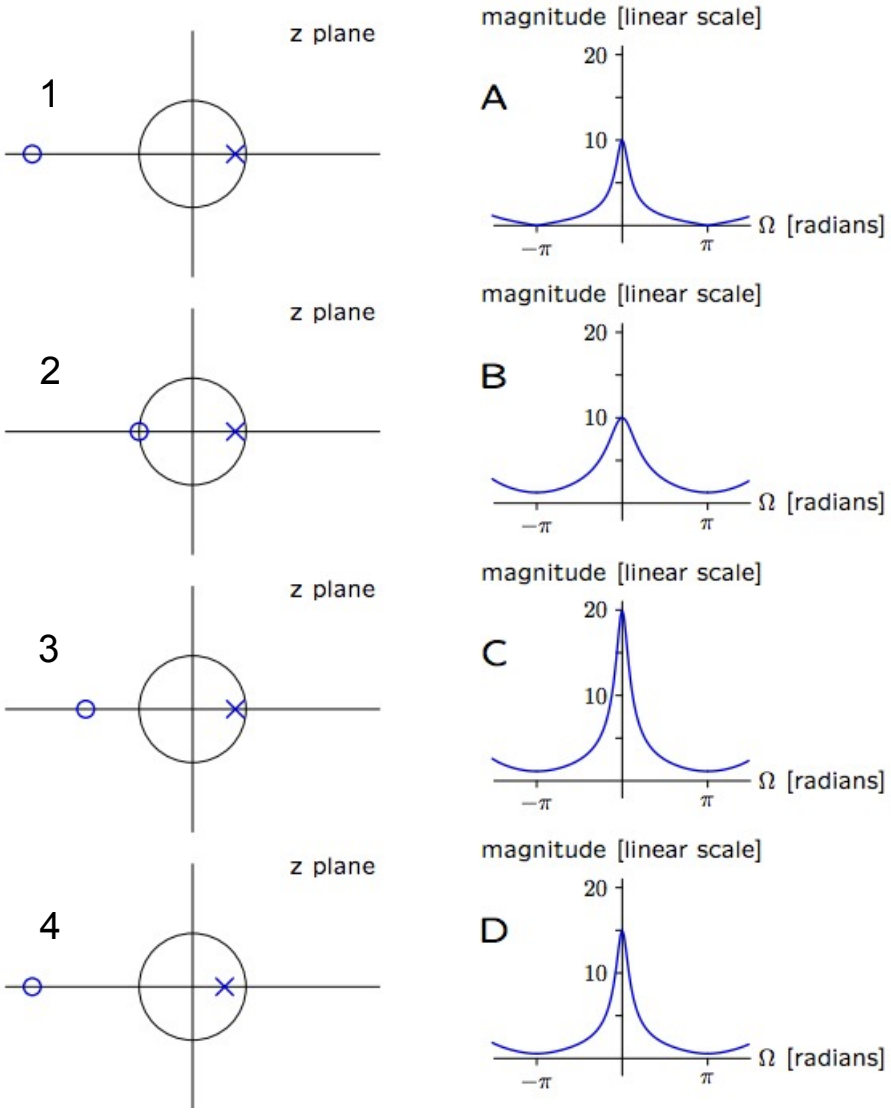
3. (8 pts.) **Magnitudes y Fases.** Considere un sistema discreto lineal e invariante en el tiempo con respuesta de frecuencia de la forma:

$$H(z) = \frac{z-a}{z-b}$$

donde a representa un cero y b representa un polo. A continuación se presentan ocho diagramas de polos y ceros respecto al círculo unitario y cuatro respuestas de magnitud y cuatro de fase[1].

(a) (4 pts.) Considere primero la siguiente figura:

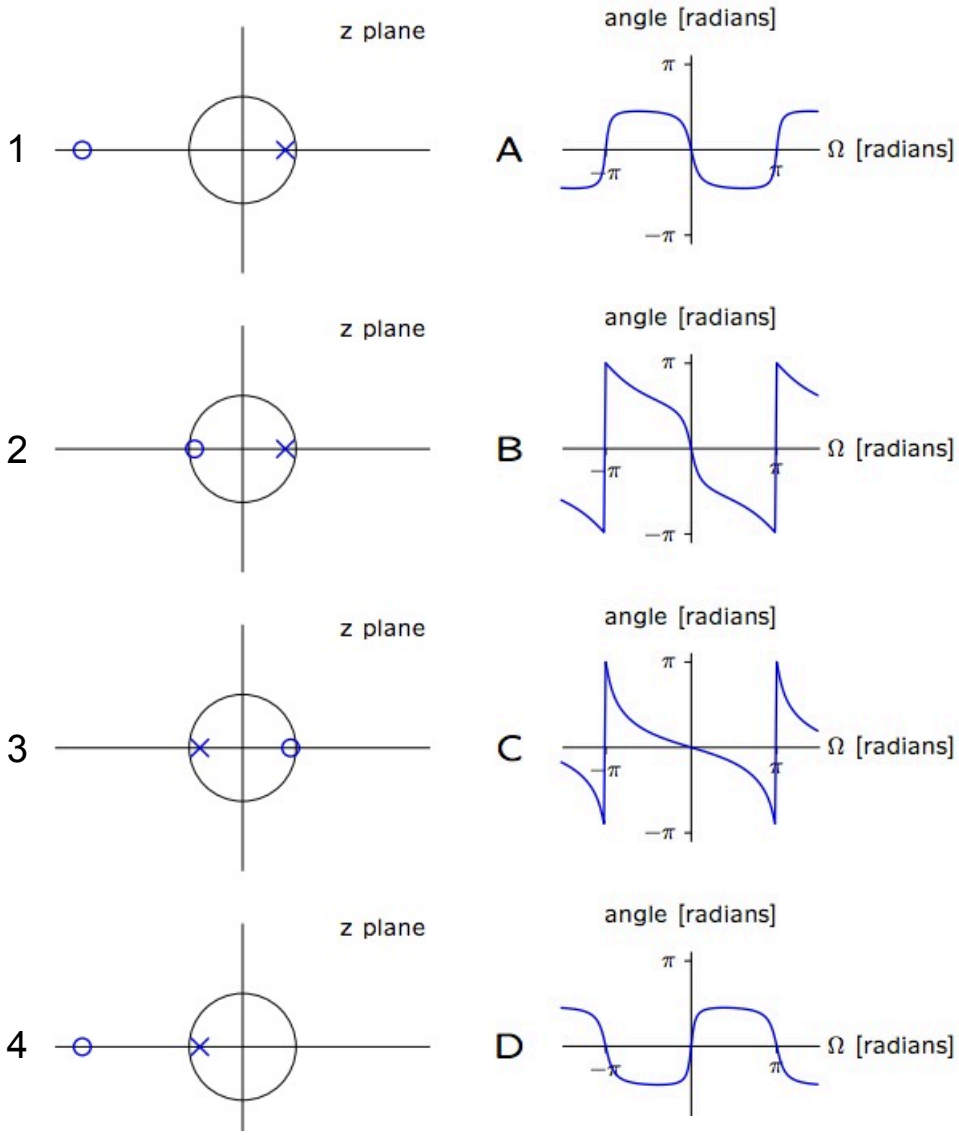
[1] Dennis Freeman, 6.003 Signals and Systems, Fall 2011. (MIT OpenCourseWare: Massachusetts Institute of Technology), `http://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-003-signals-and-systems-fall-2011/` (Accesado Oct. 10 2011). Licencia: Creative commons BY-NC-SA



De acuerdo a la figura anterior, complete la siguiente tabla, indicando cual respuesta de magnitud corresponde a cada diagrama de polos y ceros:

Diagrama	Respuesta de Magnitud
1	
2	
3	
4	

(b) (4 pts.) Considere ahora a la siguiente figura:



De acuerdo a la figura anterior, complete la siguiente tabla, indicando cual respuesta de fase corresponde a cada diagrama de polos y ceros:

Diagrama	Respuesta de Fase
1	
2	
3	
4	

Solución:

Esta pregunta puede resolverse mediante la determinación geométrica de la respuesta de frecuencia. Las respuestas son

(a)

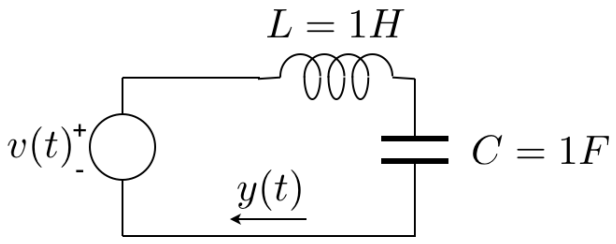
Diagrama	Respuesta de Magnitud
1	C
2	A
3	D
4	B

(b)

Diagrama	Respuesta de Fase
1	B
2	A
3	D
4	C

4. (10 pts.) **Circuitos eléctricos**

   (a) (5 pts.) Un sistema puede ser descrito mediante el siguiente circuito eléctrico:

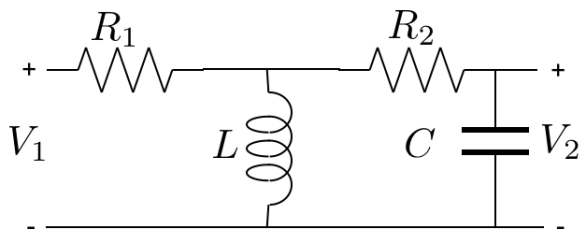


   donde la fuente de voltaje tiene valor $v(t) = \int_0^t x(t)dt$, $C = 1$ F y $L = 1$ H y la salida $y(t)$ es la corriente que pasa por el circuito. La función de transferencia puede ser escrita como

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\alpha}{s-a} + \frac{\beta}{s-b}$$

   Determine los valores de α, β, a y b y luego calcule $h(t)$ asumiendo que el circuito parte del reposo.

   (b) (3 pts.) Encuentre la función de transferencia $H(s)$ del siguiente circuito RLC:



(c) (2 pts.) Un sistema continuo es estable si todos sus polos están en el semiplano izquierdo del plano s. Determine condiciones para los valores de R_1, R_2, L y C en el circuito RLC anterior de manera que dicho sistema sea estable.

Solución:

(a) Mediante el método favorito de análisis de circuitos, se deduce la ecuación diferencial que gobierna al circuito:

$$-v(t) + L\frac{dy}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t y(t)\,dt = 0$$

Es decir, derivando nuevamente para eliminar la integral y reemplazando con el valor de $v(t)$, L y C:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y(t) = x(t) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Dado que parte del reposo es causal y por lo tanto $y(0) = y'(0) = 0$. De esta forma, llevando al dominio de Laplace mediante la propiedad de derivación:

$$\left(s^2+1\right)Y(s) = X(x) \rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(x)} = \frac{1}{s^2+1} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Para lograr la determinación de los polos, tal como se pide en la pregunta, hacemos separación por fracciones parciales, reconociendo obviamente que los polos serán puramente imaginarios:

$$\begin{aligned}\frac{1}{s^2+1} &= \frac{1}{(s+i)(s-i)} \\ &= \frac{1}{2i(s+i)} - \frac{1}{2i(s-i)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}\end{aligned}$$

Es decir, $\alpha = 1/2i$, $\beta = -1/2i$ (o viceversa) $\rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$ y $a = -i$ ó $b = i$ (o viceversa) $\rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$.

(b) La ecuación diferencial es

$$\frac{d^2V_2(t)}{dt^2}+\frac{L+CR_1R_2}{LC(R_1+R_2)}\frac{dV_2(t)}{dt}+\frac{R_1}{LC(R_1+R_2)}V_2(t)=\frac{1}{C(R_1+R_2)}\frac{dV_1(t)}{dt}\rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Tomando la transformada de Laplace queda

$$s^2V_2(s)+\frac{L+CR_1R_2}{LC(R_1+R_2)}sV_2(s)+\frac{R_1}{LC(R_1+R_2)}V_2(s)=\frac{s}{C(R_1+R_2)}V_1(s)\rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

por lo que la función de transferencia $H(s)$ es:

$$\boxed{H(s)=\frac{\frac{s}{C(R_1+R_2)}}{s^2+\frac{L+CR_1R_2}{LC(R_1+R_2)}s+\frac{R_1}{LC(R_1+R_2)}}}\rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(c) Los polos de $H(s)$ están en

$$-\frac{L+CR_1R_2}{2LC(R_1+R_2)}+\frac{\sqrt{L^2-2LCR_1R_2+c^2R_1^2R_2^2-4LCR_1^2}}{2LC(R_1+R_2)}$$

y

$$-\frac{L+CR_1R_2}{2LC(R_1+R_2)}-\frac{\sqrt{L^2-2LCR_1R_2+c^2R_1^2R_2^2-4LCR_1^2}}{2LC(R_1+R_2)}$$

Para que el sistema sea estable se requiere que la parte real de los polos anteriores sea menor a cero $\Re\{s\}<0\rightarrow$ **1 pts.**.
El límite de la estabilidad será cuando los polos estén sobre el eje imaginario, es decir parte real cero o bien $s=i\omega$. Realizando este cambio de variables, tenemos:

$$-LC(R_1+R_2)\omega^2+(L+CR_1R_2)i\omega+R_1=0$$

Si la parte real es cero, tenemos entonces que

$$\omega^2=\frac{R_1}{LC(R_1+R_2)}$$

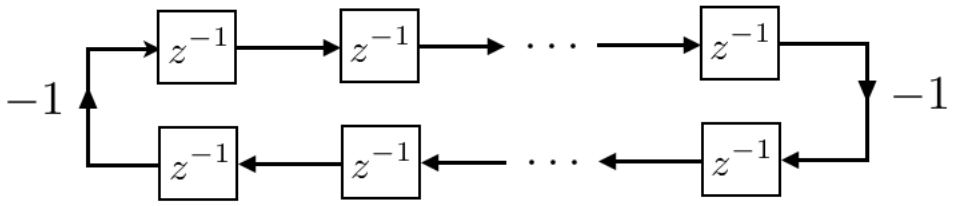
La parte imaginaria debe cumplir

$$L+CR_1R_2=0$$

lo cual nunca sucede si $L, C, R_1 y R_2$ son positivos $\rightarrow$ **1 pts.**.

5. (10 pts.) **Guía de ondas.** Considere la guía de ondas (waveguide) representada en la siguiente figura, la cual busca simular el comportamiento de una cuerda de largo L con extremos fijos que se pulsa a partir de un punto determinado. La longitud de onda del

primer modo de vibración de la cuerda es $\lambda = 2L$. Considere una frecuencia de muestreo $f_s = 44100$ Hz y c como la velocidad del propagación de una perturbación en la cuerda.



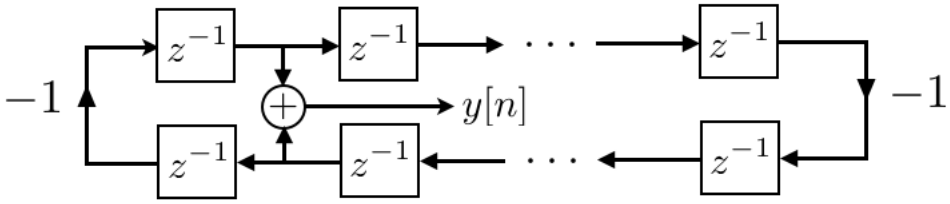
(a) (2 pts.) Determine cómo obtener a partir de este sistema una señal que describa el desplazamiento real de la cuerda.

(b) (5 pts.) Determine el número total de retardos unitarios necesarios para simular el sonido de la cuerda si se quiere producir una frecuencia $f = 882$ Hz.

(c) (3 pts.) Si la cuerda se pulsa inicialmente exactamente en la mitad de su largo, especifique qué armónicos no van a sonar.

Solución:

(a) Tal como fue visto en clases, para obtener una señal que describa el desplazamiento real de la cuerda basta tomar como salida la suma de los valores antes y después de algún retardo, como muestra la siguiente figura



(b) Sabemos que $\lambda = 2L$ y que $\lambda = c/f$ donde f es la frecuencia. Igualando las longitudes de onda tenemos

$$2L = \frac{c}{f} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

En cada retardo unitario la cuerda experimenta un desplazamiento Δx. Supongamos que la guía de ondas tiene N retardos en la parte superior del diagrama y N en la parte inferior, por lo que en total hay $2N$ retardos. Tenemos entonces que

$$N\Delta x = L \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Reemplazando en la ecuación anterior

$$2N\Delta x = \frac{c}{f}$$

Además sabemos que la distancia que recorre la onda en un período de muestreo es igual a la velocidad por el tiempo ocupado, es decir

$$\Delta x = cT_s = \frac{c}{f_s} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Reemplazando,

$$\frac{2Nc}{f_s} = \frac{c}{f}$$

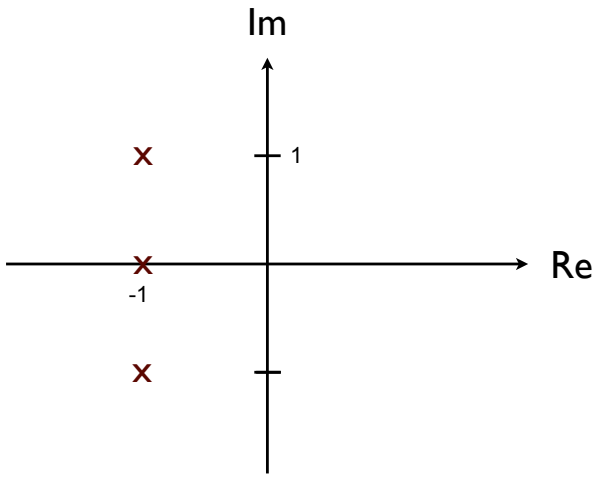
Despejando para N tenemos

$$N = \frac{cf_s}{2cf} = \frac{f_s}{2f} = \frac{44100}{2 \times 882} = 25$$

Por lo tanto el número total de retardos es $\boxed{2N = 50} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$.

(c) Al estar la cuerda fija en los extremos si se pulsa en la mitad se genera la función $\wedge(x)$. Los armónicos presentes corresponden a los componentes de la serie de Fourier, por lo tanto en este caso la cuerda no contendrá armónicos pares, dado que no puede tener cruces por cero en $L/2$, tal como fue visto en clases.

6. (10 pts.) **Sistema continuo.** Un sistema de tiempo continuo tiene el siguiente diagrama de polos y ceros en el plano s:



Asuma que la señal de entrada es

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \cos(t) > \frac{1}{\pi} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sean a_k y b_k los coeficientes de la Serie de Fourier de las señales de entrada y salida respectivamente, donde la frecuencia fundamental de cada señal tiene un período de 2π. Se sabe que $\frac{b_0}{a_0} = 1$. Determine $\frac{b_1}{a_1}$.

Solución:

Al saber las posiciones de los polos sabemos que la respuesta de frecuencia es de la forma

$$H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+1-i)(s+1+i)} \rightarrow \boxed{\textbf{3 pts.}}$$

donde K es una ganancia a determinar.

Esta respuesta evaluada en Fourier es

$$H(i\omega) = \frac{K}{(i\omega+1)(i\omega+1-i)(i\omega+1+i)}$$

Como las señales están descritas por sus componentes de Fourier, entonces

$$b_k = H(i\omega_k)a_k \rightarrow \boxed{\textbf{3 pts.}}$$

En el caso $k = 0$, $\omega_0 = 0$,

$$\frac{b_0}{a_0} = H(i0) = 1 = \frac{K}{(1-i)(1+i)} = \frac{K}{1+i-i-(-1)} = \frac{K}{2} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

por lo tanto $K = 2$.

Para $k = 1$, entonces $\omega_1 = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

$$\frac{b_1}{a_1} = H(i1) = \frac{2}{(i+1)(i+1-i)(i+1+i)} = \frac{2}{(i+1)(2i+1)} = \frac{2}{-2+i+2i+1}$$

$$\frac{b_1}{a_1} = \boxed{\frac{2}{-1+3i}} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

7. (BONUS: 5 pts.) **Transformada bilineal.** La Transformada bilineal permite convertir una respuesta de frecuencia racional continua $H_c(s)$ en el plano s a una respuesta discreta de frecuencia $H_d(z)$ en el plano z, mediante el cambio de variable

$$s = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

Considere la respuesta de un sistema continuo causal

$$H_c(s) = \frac{1}{(s + e^{i\pi/4})(s + e^{-i\pi/4})}$$

y aplique la transformada bilineal para encontrar $H_d(z)$.

(a) (2 pts.) Muestre que $H_d(e^{i\omega}) = H_c(i \tan \frac{\omega}{2})$.

(b) (2 pts.) Muestre que $H_d(z)$ tiene dos polos, ambos al interior del círculo unitario.

(c) (1 pts.) Pruebe que $|H_d(e^{i\omega})|$ decrece monotónicamente a medida que ω va desde 0 a π.

Solución:

Tenemos que

$$H_d(z) = H_c\left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(a) Por lo tanto

$$H_d(e^{i\omega}) = H_c\left(\frac{1 - e^{-i\omega}}{1 + e^{-i\omega}}\right) = H_c\left(\frac{e^{-i\omega/2} - e^{-i\omega/2}}{e^{-i\omega/2} + e^{-i\omega/2}}\right) = H_c\left(\tan\frac{\omega}{2}\right) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(b) Evaluando la transformada bi-lineal en la respuesta de frecuencia dada:

$$H_d(z) = \frac{1}{(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + e^{i\pi/4})(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + e^{-i\pi/4})}$$

Reagrupando términos,

$$H_d(z) = \frac{1}{(1 + e^{i\pi/4})(1 + e^{-i\pi/4})} \frac{(1 + z^{-1})^2}{(1 - z^{-1}\frac{1+e^{i\pi/4}}{1-e^{i\pi/4}})(1 - z^{-1}\frac{1+e^{-i\pi/4}}{1-e^{-i\pi/4}})} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Es claro que $H_d(z)$ tiene dos polos en $z = -(1 + e^{i\pi/4})/(1 - e^{i\pi/4})$ y $z = -(1 + e^{-i\pi/4})/(1 - e^{-i\pi/4})$. Es claro ver también que ambos están al interior del círculo unitario $\rightarrow$ **1 pts.**.

(c) Tenemos que

$$|H_d(e^{i\omega})| = |H_c\left(i\tan\frac{\omega}{2}\right)| = \frac{1}{|1 - \tan^2(\omega/2) + \sqrt{2}i\tan(\omega/2)|} = \frac{1}{1 + \tan^4(\omega/2)}$$

Al crecer ω desde 0 a π, $\tan(\omega/2)$ crece monotónicamente desde 0 a ∞. En consecuencia, $|H_d(e^{i\omega})|$ decrece monotónicamente desde 1 a 0. $\rightarrow$ **1 pts.**