Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Control 1

19 de Agosto 2022

---

1. Determine si el sistema $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ es:

   a) Lineal

   Comenzamos probando linealidad:

   - Homogeneidad: $\alpha L\{f(x)\} = L\{\alpha f(x)\}$
     Para comenzar, desarrollamos el lado izquierdo de la ecuación:

     $$\alpha L\{f(x)\} = \alpha \frac{f(x)}{x}$$

     Luego, desarrollamos el lado derecho:

     $$L\{\alpha f(x)\} = \frac{\alpha f(x)}{x}$$

     Notamos que los resultados obtenidos son iguales, por lo tanto **se cumple homogeneidad**.
   - Superposición: $L\{f(x) + m(x)\} = L\{f(x)\} + L\{m(x)\}$
     Para comenzar, desarrollamos el lado izquierdo de la ecuación:

     $$L\{f(x) + m(x)\} = \frac{f(x) + m(x)}{x}$$

     Luego, desarrollamos el lado derecho:

     $$L\{f(x)\} + L\{m(x)\} = \frac{f(x)}{x} + \frac{m(x)}{x} = \frac{f(x) + m(x)}{x}$$

     Notamos que los resultados obtenidos son iguales, por lo tanto **se cumple superposición**. Entonces **el sistema es lineal.**

   b) Invariante

   A continuación, probamos **invariancia**: $L\{f(x - \alpha)\} = g(x - \alpha)$
   Para comenzar tomamos el caso de que el delay se aplique a la señal de entrada:

$$f(x) \longrightarrow \boxed{\text{Retraso en a}} \longrightarrow f(x-a) \longrightarrow \boxed{\text{L\{f(x-a)\}}} \longrightarrow \frac{f(x-a)}{x}$$

Luego, tomamos el caso de que el delay se aplique a la señal de salida:

$$f(x) \longrightarrow \boxed{\text{L\{f(x)\}}} \longrightarrow \frac{f(x)}{x} \longrightarrow \boxed{\text{Retraso en a}} \longrightarrow \frac{f(x-a)}{x-a}$$

Dado que la señal de salida no es la misma si el retraso se aplica a la entrada o a la salida, podemos decir que **el sistema es variante**

c) Estable

Sabemos que un sistema es estable cuando a entradas acotadas entrega salidas acotadas. Esto significa que la salida del sistema ***no explota (no se va a infinito)*** para ninguna entrada que no tenga comportamientos no acotados. Es fácil notar que **para cualquier función** $f(x)$ **cuando** $x = 0$ **la salida del sistema se va a infinito por lo tanto el sistema es instable**.

d) Causal

Es fácil ver a simple vista que el sistema no requiere información de estados futuros de la función para generar salidas, por lo tanto el sistema **es causal**.

2. Demuestre, utilizando sus conocimientos de distribuciones, que la derivada de un escalón es un impulso.

Para encontrar la expresión que define esto, debemos definir u como una distribución y encontrar la derivada con la propiedad de derivación demostrada en el ejercicio anterior:

$$< u', \psi >= - < u, \psi' >$$

Si ahora usamos definición de distribución:

$$- < u, \psi' >= - \int_{-\infty}^{\infty} \psi'(x) u(x) \text{ dx}$$

Notemos que al multiplicar por escalón estamos haciendo nula el área en el semiplano negativo, luego:

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \psi'(x) u(x) \text{ dx} = - \int_{0}^{\infty} \psi'(x) \cdot 1 \text{ dx}$$

Usando teorema fundamental del cálculo esto queda:

$$- < u, \psi' >= - \lim_{x \to \infty} \psi(x) + \psi(0)$$

Ya que por definición las funciones de Shwartz son suaves, infinitamente derivables y decaen rápidamente a cero, sabemos que:

$$\lim_{x\to\infty} \psi(x) = 0$$

Luego, sustituyendo este valor en la distribución:

$$- < u, \psi' >= 0 + \psi(0) = \psi(0)$$

Por lo tanto:

$$< u', \psi >= \psi(0)$$

Sabemos que la definición de impulso es una distribución que evalúa la función sobre la que se aplica en cero. Entonces **la derivada del escalón es una distribución, que realiza lo mismo que el impulso, luego la derivada de escalón es un impulso**.

Finalmente:

$$u' = \delta$$

3. Muestre la parte real e imaginaria de $\sqrt{i} + \ln(-1)$

   Para realizar esto, es necesario entender que la parte real de la suma será la suma de las partes reales de cada número y la parte imaginaria de la suma será la suma de las partes imaginarias de cada número. De esta forma, resolvemos individualmente:

   - $\ln(-1)$
     Pare resolver esto es necesario tener en mente la definición de logaritmo natural:

     $$\ln(a) = b \quad | \quad e^b = a$$

     Es decir, lo que nos están preguntando es: ¿A qué exponente debo elevar e para que el valor numérico de la potencia sea -1? Para resolver esto, observo la fórmula de Euler:

     $$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

     Notamos que estamos buscando un ángulo que tenga coseno -1 y seno cero. Todos los múltiplos enteros impares de π cumplen con esto, por lo tanto:

     $$\ln(-1) = i(2k+1)\pi \quad \forall \quad k \in \mathrm{Z}$$

     Por lo tanto obtenemos que:

Parte real:0 Parte imaginaria: $(2k+1)\pi$

- $\sqrt{i}$

  Para resolver esto es necesario escribir i de alguna forma conveniente. Esto se puede realizar usando la fórmula de Euler:

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

  Si ahora elevo esto a $\frac{1}{2}$ para obtener la raíz, tendré:

$$i^{\frac{1}{2}} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

  Finalmente:

$$\sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Finalmente se tiene que:

$$\sqrt{i} + \ln(-1) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} + (2k+1)\pi i$$

Reordenando términos:

$$\sqrt{i} + \ln(-1) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + (2k+1)\pi\right)$$

Por lo que:

- Parte real: $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- Parte imaginaria: $\frac{\sqrt{2}}{2} + (2k+1)\pi$