Prueba 1 SOLUCIÓN

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Escriba un problema en cada hoja. Debe colocar su nombre en todas las hojas. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

Elastografía es una técnica para medir la elasticidad (rigidez) de un tejido. En el hígado se usa para detectar fibrosis porque cuando hay, este se coloca más rígido en esa región. Una versión simplificada obtenida con ultrasonido es la siguiente. Se mide alguna característica del tejido en una linea recta (lo llamaremos el eje x) que comienza en el transductor sobre la piel y que penetra el cuerpo hacia adentro. Eso genera una función $f_o(x)$. Luego se presiona el cuerpo, lo que produce compresión y se mide la característica nuevamente para generar la función $f_p(x)$. Se puede pensar que la versión comprimida es igual a la versión sin comprimir, pero con un desplazamiento variable según la región. Es decir

$$f_p(x) = f_o(x + \Delta(x))$$

El objetivo es encontrar $\Delta(x)$ del cual se infiere la elasticidad. Para encontrarlo se puede usar la correlación entre ambas señales. El peak de la correlación indicará el desplazamiento. Obviamente hay que hacerlo por tramos, porque el desplazamiento depende de la posición. Para encontrar $\Delta(a)$ usaremos una ventana centrada en a y de ancho b. Es decir usaremos

$$p(x) = \left\{ f_o(x) \sqcap (\frac{x-a}{b}) \right\} \star \left\{ f_p(x) \sqcap (\frac{x-a}{b}) \right\}$$

Donde $\star$ es la operación de correlación. La mejor estimación de $\Delta(a)$ será

$$\hat{\Delta}(a) = \text{argmax } p(x)$$

1. [6 ptos] Si para el sistema de elastografía descrito, se define que la entrada es $\Delta(x)$ y la salida $\hat{\Delta}(x)$, indique si el sistema es lineal e invariante, y demuestre su respuesta.

   Resultado: Veamos primero linealidad, y en particular homogeneidad, es decir qué pasa cuando la entrada es $\alpha\Delta(x)$. Dado que los deplazamiento se obtienen correlacionando dos ventanas de ancho b, es importante que el desplazamiento sea menos que $b/2$, sino los datos en cada una de las ventanas no corresponderán a los mismos x. Por lo tanto la respuesta será errónea si α es suficientemente grande, y distinta a $\alpha\hat{\Delta}(x)$.

   Formalmente podemos encontrar un caso que demuestra que no es homogéneo. Sea $\Delta(x) = 5$, es decir

   $$f_p(x) = f_o(x + 1)$$

   y sea $b = 20$, es decir, la correlación para $a = 0$ se calculará entre

   $$f_o(x), \quad -10 < x < 10$$

   y

   $$f_o(x + 5), \quad -10 < x < 10 \quad \text{que es lo mismo que} \quad f_o(x), \quad -5 < x < 15$$

Todavía hay intersección y el peak de la correlación nos dará información del desplazamiento (quizás no precisa, de hecho es el desplazamiento convolucionado con rect). Pero si 5 cambia a 30, tenemos una comparación entre

$$f_o(x), \quad -10 < x < 10 \quad \text{y} \quad f_o(x), \quad 20 < x < 40$$

Donde obviamente no hay intersección por lo que el resultado será cualquier cosa. El sistema no es lineal ya que no es hoomogéneo.

Ahora veamos la invariancia, es decir, veamos cómo es la salida si la entrada es $\Delta(x - \tau)$. Como no hay restricción para donde está ubicado el desplazamiento, el sistema es invariante. En palabras simpmles: no importa mucho que el desplazamiento de 1 cm esté en la posición $x = 2$ o en $x = 4$. La única suposición que hay que hacer es que $f_o(x)$ es suficientemente "grande", para que se pueda trasladar ese desplazamiento. Formalmente, se puede definir $\rho(x) = \Delta(x-\tau)$ y el sistema entregará en la salida $\hat{\rho}(x)$ que es exactamente $\hat{\rho}(x - \tau)$. En resumen el sistema es invariante, bajo la suposición de que $f_o(x)$ tiene información en todos los lugares a los que se desplace $\Delta(x)$.

2. [6 ptos] Efecto de la variable b en el sistema de elastografía:

   (a) [3 ptos] ¿Cuál es el mínimo valor de b que se puede usar, si se sabe que el máximo de $|\Delta(x)|$ es m?

   (b) [3 ptos] Explique cualitativamente cómo cambia la precisión de la medición de $\Delta(x)$ en función de b.

   Resultado:

   (a) Dado que la ventana de correlación tiene ancho b, el peak estará siempre en el rango $-b/2 < \hat{\Delta}(a) < b/2$. De manera, que para que haya alguna posibilidad de estimar correctamente el desplazamiento, es necesario que $b > 2m$.

   (b) El ancho de la ventana de correlación hace que el desplazamiento estimado sea un especie de promedio de los desplazamientos en la ventana. Por lo que si la ventana es muy grande la estimación del desplazamiento será muy imprecisa porque no corresponderá a un punto en particular, aunque por haber muchos datos la componente aleatoria es menos importante (menos ruido). Por ejemplo, si la ventana fuera del mismo tamaño del cuerpo el desplazamiento estimado sería cero, porque el cuerpo se comprimió y por lo tanto hay tantos desplazamientos positivos como negativos, y ese cero casi no tiene desviación estándar. Por otro lado, en la medida que b disminuye, la estimación de desplazamiento se hace más precisa en el sentido que es el desplazamiento que ocurre en ese punto, pero la calidad estadística (y el máximo posible) disminuyen.

3. [6 ptos] Se tiene un sistema lineal e invariante cuya salida es

$$g(t) = \sqcap(t)(2 - 2e^{-t/a}).$$

   (a) [2 ptos] Si la entrada que produjo esa salida es $f(x) = \sqcap(x)$, encuentre la ecuación diferencial que describe el sistema (llamésmolo sistema $\mathcal{S}$).

(b) [2 ptos] Encuentre la ecuación diferencial del sistema que es la conexión en cascada de dos sistemas $\mathcal{S}$, es decir $\mathcal{S}\{\mathcal{S}\{\cdot\}\}$

(c) [2 ptos] Si la entrada que produjo la salida original $g(t)$ es $f(x) = \delta(x)$, encuentre la ecuación diferencial que describe el sistema.

Resultado:

(a) Por simple inspección se reconoce un sistema lineal de primer orden de la forma

$$g' + \alpha g = \beta f$$

Para definirlo debemos encontrar los valores para los coeficientes α y β. La solución a esa ecuación con $f(x) = \sqcap(x)$ es

$$g(x) = \beta\{1 - e^{-\alpha t}\}\sqcap(x)$$

De donde $\alpha = 1/a$ y $\beta = 2$, es decir

$$g'(x) + \frac{1}{a}g(x) = 2f(x)$$

(b) Haremos que la salida del sistema anterior sea la entrada a un segundo sistema, es decir,

$$h'(x) + \frac{1}{a}h(x) = 2g(x)$$

El sistema total se encuentra sustituyendo

$$h''(x) + \frac{2}{a}h'(x) + \frac{1}{a^2}h(x) = 4f(x)$$

(c) En forma similar que en (a) se obtiene

$$g''(x) + \frac{1}{a}g'(x) = \frac{2}{a}f(x)$$