Interrogación 3

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo dos carillas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre en todas las hojas que ocupe. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.
- En esta interrogación hay 3 preguntas. Las preguntas 1 y 2 son obligatorias. En la pregunta 3, debe elegir responder la parte a) o la parte b). Si responde ambas partes, se corregirá una al azar.

---

1. (10 pts). Sea $F(s)$ la Transformada de Laplace de $f(t) = \ln(t)\sqcap(t)$.

   (a) (3 pts.) Demuestre que $F(\frac{s}{a}) = aF(s) + \frac{a\ln(a)}{s}$, con $a \in \Re$.

   (b) (3 pts.) Deduzca a partir de lo anterior que $F'(s) = -\frac{F(s)}{s} - \frac{1}{s^2}$.

   (c) (3 pts.) Integre la ecuacion predecente y deduzca que $F(s) = \frac{-(C+\ln(s))}{s}$, donde C es una constante conocida como la constante de Euler-Mascheroni.

   (d) (1 pt.) Determine una expresión para la constante C.

   Solución:

   (a) Dado que $f(t)$ es una señal derecha, podemos utilizar la transformada unilateral. Evaluamos esta transformada en (s/a), entonces

   $$F\left(\frac{s}{a}\right) = \int_0^\infty \ln(t)e^{-\frac{s}{a}t}dt \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

   Hacemos el cambio de variable $u = \frac{t}{a}$, $du = \frac{dt}{a}$, entonces

   $$F\left(\frac{s}{a}\right) = \int_0^\infty a\ln(au)e^{-su}du \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

   Separando el logaritmo, tenemos

   $$F\left(\frac{s}{a}\right) = a\int_0^\infty \ln(a)e^{-su}du + a\int_0^\infty \ln(u)e^{-su}du$$

   Reconocemos en el sumando derecho la Transformada de Laplace original, y en el sumando izquierdo podemos sacar el logaritmo fuera de la integral. Entonces

   $$F\left(\frac{s}{a}\right) = a\ln(a)\int_0^\infty e^{-su}du + aF(s) = -\frac{a\ln(a)}{s}e^{-su}\Big|_{u=0}^{u=\infty} + aF(s) = -\frac{a\ln(a)}{s}(0-1) + aF(s)$$

   es decir

   $$\boxed{F\left(\frac{s}{a}\right) = aF(s) + \frac{a\ln(a)}{s}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(b) Partiendo de la igualdad anterior, podemos derivar a ambos lados respecto a a:

$$\frac{d}{da}F\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{d}{da}aF(s) + \frac{d}{da}\frac{a\ln(a)}{s} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

$$F'\left(\frac{s}{a}\right)\frac{-s}{a^2} = F(s) + \frac{1}{s}\left(\ln(a) + \frac{a}{a}\right) = F(s) + \frac{\ln(a)}{s} + \frac{1}{s}$$

Ahora podemos reemplazar $F(s)$ de acuerdo a la igualdad anterior, entonces

$$F'\left(\frac{s}{a}\right)\frac{-s}{a^2} = \frac{1}{a}\left(F\left(\frac{s}{a}\right) - \frac{a\ln(a)}{s}\right) + \frac{\ln(a)}{s} + \frac{1}{s} = \frac{F\left(\frac{s}{a}\right)}{a} - \frac{\ln(a)}{s} + \frac{\ln(a)}{s} + \frac{1}{s} = \frac{F\left(\frac{s}{a}\right)}{a} + \frac{1}{s} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

despejando

$$F'\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{-a^2}{s}\left(\frac{F\left(\frac{s}{a}\right)}{a} + \frac{1}{s}\right) = -\left(\frac{a}{s}\right)F\left(\frac{s}{a}\right) - \left(\frac{a}{s}\right)^2$$

sea $\xi = \frac{s}{a}$, entonces podemos escribir

$$\boxed{F'(\xi) = -\left(\frac{1}{\xi}\right)F(\xi) - \left(\frac{1}{\xi}\right)^2} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

que es lo que se pide demostrar.

(c) El resultado anterior lo evaluamos en s y multiplicamos a ambos lados por s:

$$sF'(s) = -F(s) - \frac{1}{s} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

reagrupando

$$sF'(s) + F(s) = -\frac{1}{s}$$

nos damos cuenta que el lado derecho es la derivada de $sF(s)$ respecto a s, por lo que

$$\frac{d}{ds}\{sF(s)\} = -\frac{1}{s} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Podemos integrar a ambos lados entre 1 y un valor cualquiera $\hat{s}$ (para evitar integrar desde cero), entonces:

$$sF(s)\Big|_{s=1}^{s=\hat{s}} = \hat{s}F(\hat{s}) - F(1) = -\int_1^{\hat{s}}\frac{ds}{s} = -\ln(s)\Big|_{s=1}^{s=\hat{s}} = -\ln(\hat{s}) + \ln(1)$$

es decir

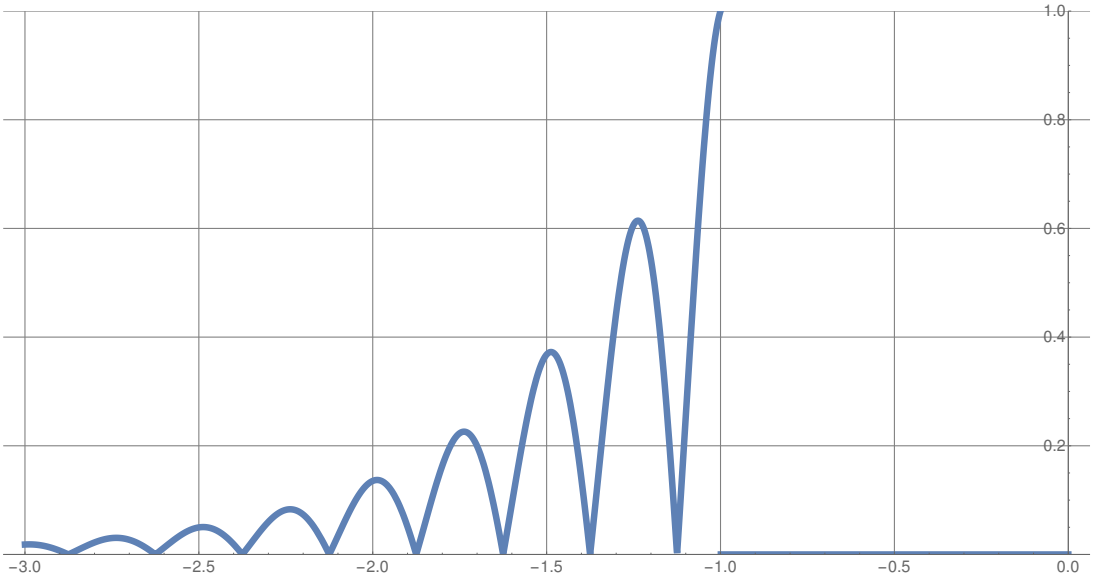
$$\boxed{F(\hat{s}) = \frac{1}{\hat{s}}\left(F(1) - \ln(\hat{s})\right) = \frac{-\left(-F(1) + \ln(\hat{s})\right)}{\hat{s}}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

con lo que se demuestra lo solicitado y se puede deducir que la constante $C = -F(1)$.

(d) Como la constante de Euler-Mascheroni C es igual a menos la Transformada de Laplace unilateral evaluada en $s = 1$, tenemos que

$$\boxed{C = -\int_0^\infty \ln(t) e^{-t} dt} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

2. (8 pts.) Sea $h(t)$ la respuesta al impulso de un sistema especificada de acuerdo al siguiente gráfico:



(a) (5 pts.) Estime la región de convergencia de la función de transferencia $\mathcal{L}\{h(t)\}$.

(b) (3 pts.) ¿Existe la transformada de Fourier de la respuesta al impulso $\mathcal{F}\{h(t)\}$? ¿Es el sistema estable? ¿Es el sistema causal?

Solución:

(a) Primero notamos que el decaimiento de dicha respuesta al impulso es **exponencial** y que además de esto poseera un desplazamiento que no afectará a la ROC. → **1 pts.** Luego como lo único que importará para la ROC será la velocidad de dicho decaimiento y no la forma de la señal podemos escribir $h(t)$ como

$$h(t) \approx e^{\alpha(t+1)} \sqcap (-(t+1)) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

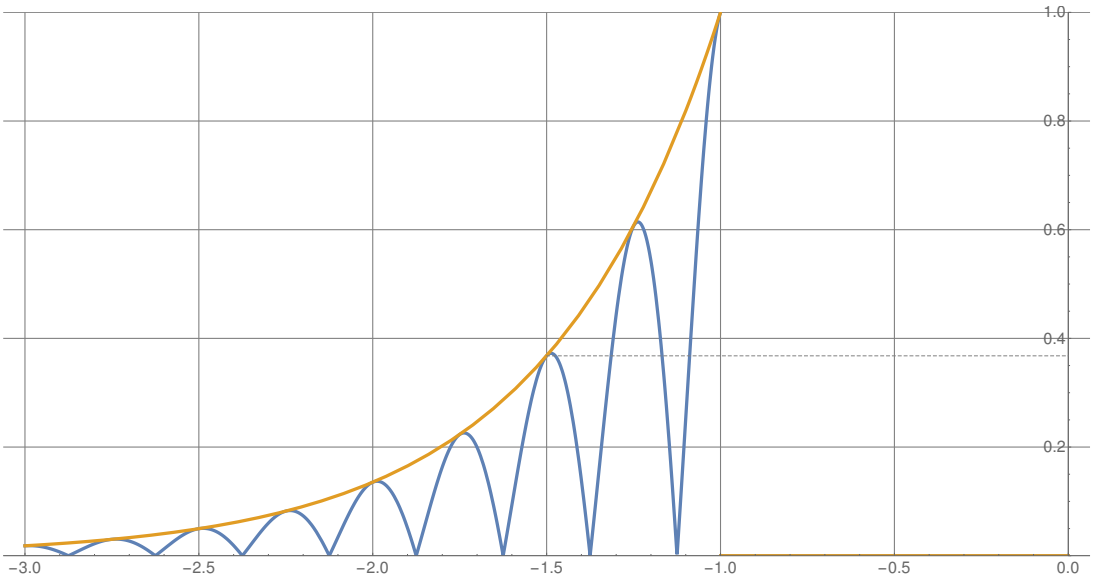
y solo bastará estimar α. Se puede ver a partir del gráfico que en $t = -3/2$

$$\begin{aligned} h(-3/2) &\approx e^{-\alpha/2}, \\ &\approx 0.37 \\ &\approx e^{-1}. \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\alpha = 2$ y la ROC será

$$\mathrm{Re}\{s\} < 2. \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(b) Como la ROC incluye al eje imaginario entonces $h(t)$ tiene transformada de **Fourier** y de la misma forma el sistema será **estable**. → **2 pts.** El sistema no será **causal** debido a que la ROC es izquierda. → **1 pts.**



3. (5 pts.) Considere la Transformada de Laplace unilateral siguiente:

$$F_1(s) = e^{-2s}\frac{1}{(s+1)^3}\frac{s}{s^2+2s+2}$$

cuya transformada inversa es $f(t)$.

Responda solo una de las siguientes preguntas:

(a) (5 pts.) Exprese $f(t)$ como una convolución.

(b) (5 pts.) Si $f(t)$ representa la altura de un zepelín (globo aeroestático o dirigible) a la deriva sujeto a la influencia del viento, determine si este artefacto aterrizará en algún momento.

Solución:

(a) Notamos que $F_1(s)$ se puede escribir como $e^{-2s}H(s)G(s)\rightarrow$ **1 pts.** con

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

y

$$G(s) = \frac{s}{s^2+2s+2} = \frac{s}{(s+1+i)(s+1-i)}$$

Utilizando el método de los residuos y asumiendo señales derechas:

$$h(t) = \lim_{s\to -1}\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\{\frac{1}{(s+1)^3}e^{st}(s+1)^3\} = \lim_{s\to -1}\frac{1}{2}t^2e^{st} = \frac{t^2}{2}e^{-t}\sqcap(t)\rightarrow$$ **1 pts.**

$$g(t) = \lim_{s\to(-1-i)} \frac{e^{st}s(s+1+i)}{(s+1+i)(s+1-i)} + \lim_{s\to(-1+i)} \frac{e^{st}s(s+1-i)}{(s+1+i)(s+1-i)}$$

$$g(t) = \lim_{s\to(-1-i)} \frac{e^{st}s}{(s+1-i)} + \lim_{s\to(-1+i)} \frac{e^{st}s}{(s+1+i)}$$

$$g(t) = \frac{e^{(-1-i)t}(-1-i)}{(-1-i+1-i)} + \frac{e^{(-1+i)t}(-1+i)}{(-1+i+1+i)} = \frac{e^{-t}e^{-it}(-1-i)}{-2i} + \frac{e^{-t}e^{it}(-1+i)}{2i}$$

$$g(t) = \frac{-e^{-t}e^{-it} - ie^{-t}e^{-it}}{-2i} + \frac{-e^{-t}e^{it} + ie^{-t}e^{it}}{2i}$$

$$g(t) = e^{-t}\left(\frac{e^{-it} - ie^{-it}}{-2i} + \frac{e^{it} + ie^{it}}{2i}\right) = e^{-t}\left(\cos(t) - \operatorname{sen}(t)\right)\sqcap(t) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

El factor e^{-2s} implica que debemos considerar $h(t-2) \rightarrow$ **1 pts.**, por lo tanto

$$\boxed{f(t) = h(t-2) * g(t) = \frac{(t-2)^2}{2}e^{-(t-2)}\sqcap(t-2) * e^{-t}(\cos(t) - \operatorname{sen}(t))\sqcap(t)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(b) Si definimos que a la altura cero está la tierra $\rightarrow$ **1 pts.**, entonces podemos estimar si en algún momento lejano (en el infinito), el valor de $f(t)$ converge a cero o no, mediante el teorema del valor final $\rightarrow$ **2 pts.**. Es decir,

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF_1(s)$$

Por lo tanto, debemos calcular:

$$\lim_{s\to 0} e^{-2s}\frac{s^2}{(s+1)^3(s^2+2s+2)} = \frac{1\times 0}{1\times 2} = 0 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Lo que implica que en el infinito, $f(t) = 0$, es decir el zepelín sí aterriza $\rightarrow$ **1 pts.**.