IEE2103 - SEÑALES Y SISTEMAS

Interrogación 1

Prof. Rodrigo F. Cádiz

1er. semestre 2020
Tiempo: 3 hrs.
Puntos: 52
Fecha: 20/04/2020

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo dos carillas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre, rut, número de interrogación y número de pregunta en todas las hojas que ocupe. Las hojas sin esta información no serán corregidas.

---

1. (12 pts.) **Aparente contradicción en los sistemas lineales**.

   (a) (2 pts.) Sabemos que la respuesta de un sistema lineal puede calcularse mediante la suma de la respuesta a estado cero más la respuesta a entrada cero. Esto implica que la salida de un sistema lineal contiene una parte que se debe solamente al estado del sistema, la llamada respuesta a entrada cero y otra que depende exclusivamente de la entrada y no del estado del sistema, la respuesta a estado cero.

   Sin embargo, un sistema lineal debe cumplir homogeneidad. Es decir si $f(t) \to g(t)$, entonces $af(t) \to ag(t)$, con $a \in \mathbb{R}$. Entonces, si la entrada es cero, por homogeneidad $0f(t) \to 0g(t)$, es decir, para un sistema lineal la respuesta a entrada cero es cero.

   ¿En qué quedamos entonces? Por un lado, se sabe que en los sistemas lineales puede existir una respuesta a entrada cero no nula y al mismo tiempo por linealidad esa respuesta debe ser cero. Intente argumentar de la mejor forma posible como resolver esta aparente contradicción.

   (b) (5 pts.) Luego de la reflexión anterior, considere un sistema LTI del cual sólo se sabe que tiene dos estados w_0 y w_1, y que se han observado algunas señales de salida $g(t)$ para ciertas señales de entrada $f(t)$ y valores de sus variables de estado, de acuerdo a la siguiente tabla.

$f(t)$	w_0	w_1	$g(t)$
0	2	1	$e^{-t}(3t+2)\sqcap(t)$
0	1	-1	$e^{-t}\sqcap(t)$
$\sqcap(t)$	-1	-1	$2\sqcap(t)$

   Usando la información de la tabla, encuentre la respuesta a estado cero del sistema LTI a la entrada escalón $\sqcap(t)$.

   (c) (5 pts.) Ahora, considere un sistema LTI determinado por su respuesta al impulso h:

$$h = 2e^{-t}\sqcap - \delta$$

   como esta respuesta involucra impulsos, debemos entenderla en el sentido de las distribuciones, por eso la notación.

   i. (3 pts.) Encuentre la respuesta a estado cero cuando la entrada es $e^{t}\sqcap(-t)$, donde $\sqcap(t)$ es el escalón.

   ii. (2 pts.) Demuestre que la magnitud de la respuesta de frecuencia de este sistema es constante.

La pregunta 1 continúa en la página siguiente ...

Solución

(a) Para responder esta pregunta, imaginemos que tenemos un sistema LTI que inicialmente estaba en reposo, en algún tiempo lejano. Dado que tenía condiciones iniciales nulas, la salida del sistema $g(t)$ a una entrada $f(t)$ consiste sólo de la respuesta a estado cero y se puede calcular mediante la convolución con su respuesta al impulso $h(t)$ de la forma

$$g(t) = (f * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Hasta ahora no hay ningún problema. Pero nada nos impide dividir esta integral en dos, de la siguiente forma

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t_0} f(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_{t_0}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

La primera integral representa el estado en el instante t_0, la *respuesta a entrada cero*. La segunda integral representa la respuesta debido a la entrada, olvidando el estado anterior, la *respuesta a estado cero*. Obviamente, este nuevo sistema, que ahora considera condiciones iniciales **no es un sistema LTI**, porque no es homogéneo. Sin embargo, este sistema sigue respondiendo en forma proporcional a cambios en amplitudes de la entrada. Esto es porque el sistema original, que estaba inicialmente en reposo, si es LTI. Entonces, es necesario considerar una noción más general de linealidad, que pueda considerar el estado. Dicho de otro modo, *las ecuaciones* que definen al sistema original siguen siendo lineales, dado que en un inicio era un sistema LTI, pero el *sistema* con condiciones iniciales no nulas ya no es lineal.

Formalmente, hay que considerar linealidad tanto respecto a las entradas como respecto a los estados → **3 pts.**

(b) Dado que el sistema en cuestión es lineal, está descrito por ecuaciones lineales, aunque tenga condiciones iniciales no nulas. Por lo tanto, se pueden hacer operaciones lineales con las observaciones. Completando la tabla, tenemos entonces:

Observación	$f(t)$	w_0	w_1	$g(t)$
O1	0	2	1	$e^{-t}(3t+2)\sqcap(t)$
O2	0	1	-1	$e^{-t}\sqcap(t)$
O3	$\sqcap(t)$	-1	-1	$2\sqcap(t)$
O4: $\frac{1}{3}$(O1 + O2)	0	1	0	$te^{-t}\sqcap(t) + e^{-t}\sqcap(t)$→ **1 pt.**
O5: $\frac{1}{2}$(O2 + O3)	$\frac{1}{2}\sqcap(t)$	0	-1	$\frac{1}{2}e^{-t}\sqcap(t) + \sqcap(t)$→ **1 pt.**
O6: O4 + O5	$\frac{1}{2}\sqcap(t)$	1	-1	$te^{-t}\sqcap(t) + \frac{3}{2}e^{-t}\sqcap(t) + \sqcap(t)$→ **1 pt.**
O7: O6 - O2	$\frac{1}{2}\sqcap(t)$	0	0	$te^{-t}\sqcap(t) + \frac{1}{2}e^{-t}\sqcap(t) + \sqcap(t)$→ **1 pt.**

Por lo tanto, la salida pedida es 2 veces la observación 7, es decir:

$$g(t) = 2te^{-t}\sqcap(t) + e^{-t}\sqcap(t) + 2\sqcap(t) = (2te^{-t} + e^{-t} + 2)\sqcap(t) \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

(c) Como el sistema es LTI, la respuesta a estado cero es simplemente la convolución de la salida con la entrada.

La pregunta 1 continúa en la página siguiente ...

i. Entonces

$$g = (2e^{-t}\sqcap - \delta) * e^{t}\partial_{-1}\sqcap \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Esta ecuación es mucho más simple de resolver en el dominio de Fourier:

$$G(u) = \left(\frac{2}{1+i2\pi u} - 1\right)\frac{1}{1-i2\pi u} = \frac{1}{1+i2\pi u} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

por lo tanto, la salida en el dominio del tiempo es simplemente,

$$g(t) = e^{-t}\sqcap(t) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

ii. Como vimos, la Transformada de Fourier de la respuesta al impulso, es decir la respuesta de frecuencia, es:

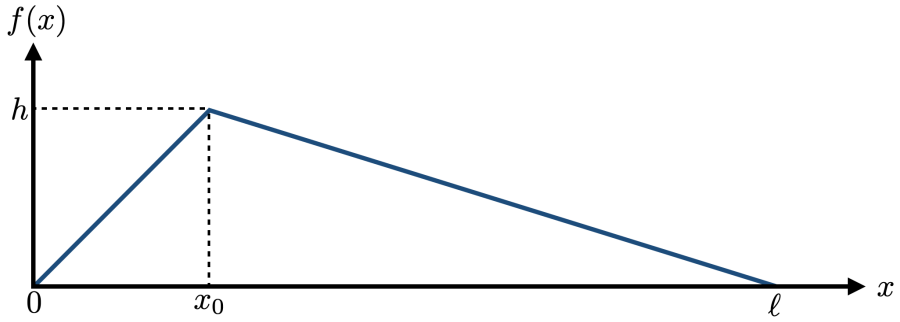
$$H(u) = \frac{2}{1+i2\pi u} - 1 = \frac{1-i2\pi u}{1+i2\pi u} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Tomando la magnitud, tenemos

$$|H(u)| = \frac{|1-i2\pi u|}{|1+i2\pi u|} = 1 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

lo cual es evidente dado que se trata de complejos conjugados.

2. (12 pts.) **La guitarra y su Serie de Fourier**. Considere una cuerda de una guitarra de largo ℓ que es pulsada hasta una altura h a una distancia x_0 del puente, de acuerdo a la figura.



(a) (10 pts.) Determine una expresión en Series de Fourier de la cuerda descrita en la posición de la figura.

(b) (2 pts.) Determine si la energía de cada armónico de la cuerda decrece o crece con respecto a la frecuencia y en qué proporción.

Solución

(a) En primer lugar, para aprovechar la simetría de las Series de Fourier, extendemos $f(x)$ de forma impar a una función de período 2ℓ $\rightarrow$ **1 pt.** De esta forma, solo nos sirven los coeficientes b_n de la expansión en bases impares seno. Además, como la multiplicación de

La pregunta 2 continúa en la página siguiente ...

una función seno por una función impar es par, basta calcular 2 veces la integral entre 0 y ℓ. Es decir, necesitamos calcular:

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin(n\pi\frac{x}{\ell})dx \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

La cuerda se representa como una función lineal por tramos, por lo que

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{x0} \frac{hx}{x_0}\sin(n\pi\frac{x}{\ell})dx + \frac{2}{\ell}\int_{x_0}^{\ell} \frac{h}{x_0-\ell}(x-\ell)\sin(n\pi\frac{x}{\ell})dx \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Integrando por partes obtenemos

$$\frac{\ell}{2}b_n = \frac{h}{x_0}\int_0^{x0} \frac{\ell}{n\pi}\cos(n\pi\frac{x}{\ell})dx - [\frac{h}{x_0}\frac{\ell}{\pi n}x\cos(n\pi\frac{x}{\ell})]\Big|_0^{x_0}$$
$$+\frac{h}{x_0-\ell}\int_{x_0}^{\ell} \frac{\ell}{n\pi}\cos(n\pi\frac{x}{\ell})dx - [\frac{h}{(x_0-\ell)}\frac{\ell}{\pi n}(x-\ell)\cos(n\pi\frac{x}{\ell})]\Big|_{x_0}^{\ell} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Simplificando

$$\frac{\ell}{2}b_n = \frac{h}{x_0}\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi x}{\ell})\Big|_0^{x_0} - \frac{h\ell}{\pi n}\cos(n\pi\frac{x_0}{\ell})$$
$$+\frac{h}{x_0-\ell}\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi x}{\ell})\Big|_{x_0}^{\ell} + \frac{h}{(x_0-\ell)}\frac{\ell}{\pi n}(x_0-\ell)\cos(n\pi\frac{x_0}{\ell})$$

lo que otorga

$$\frac{\ell}{2}b_n = \frac{h\ell^2}{x_0 n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi x_0}{\ell}) - \frac{h}{x_0-\ell}\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi x_0}{\ell})$$

con lo que

$$\boxed{b_n = \frac{2h}{x_0(\ell-x_0)}\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi x_0}{\ell})} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Finalmente, la expansión en Series de Fourier de la cuerda es

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2h}{x_0(\ell-x_0)}\frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi x_0}{\ell})\sin(\frac{n\pi x}{\ell})} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Esta expansión coincide exactamente con la cuerda en el intervalo de interés $[0,\ell]$.

(b) La energía es proporcional a $(b_n)^2$ $\rightarrow$ **1 pt.**, lo que implica que la energía de cada armónico decrece en proporción a n^4, a medida que la frecuencia indexada por n aumenta $\rightarrow$ **1 pt.**

3. (12 pts.) **El fenómeno de Gibbs**. En esta pregunta estudiaremos desde dos puntos de vista distintos

La pregunta 3 continúa en la página siguiente ...

lo que sucede con el fenómeno de Gibbs, que describe las oscilaciones que se producen al aproximar una señal en los puntos donde hay discontinuidades.

(a) (8 pts.) Considere una función $f(x)$ con Transformada de Fourier $F(u)$ y una función aproximante

$$f_\xi(x) = \int_{-\xi}^{\xi} F(u) e^{i2\pi ux} du$$

para todo $\xi > 0$. Como vemos, esta función reconstruye la Transformada inversa de Fourier sólo considerando frecuencias graves en el intervalo $|u| < \xi$. Es, en este sentido, una especie de filtro pasa-bajos. Al aproximar de esta manera funciones con discontinuidades, en los puntos de la discontinuidad ocurren oscilaciones debido al fenómeno de Gibbs.

i. (3 pts.) Muestre que $f_\xi(x)$ se puede escribir como una convolución de la forma:

$$f_\xi(x) = f(x) * g(x, \xi)$$

Determine una forma analítica para la función $g(x, \xi)$.

ii. (2 pts.) Determine, en el sentido de las distribuciones,

$$\lim_{\xi \to +\infty} g(x, \xi) \text{ y } \lim_{\xi \to +\infty} f_\xi(x)$$

iii. (3 pts.) Considere el caso $f(x) = \sqcap(x)$. Muestre que

$$\sqcap_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(2\pi\xi x)$$

donde Si es la función *seno integral,* definida como

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$$

lo que implica que para todo valor de ξ siempre habrán oscilaciones dada la presencia de la función seno integral en esta aproximación.

(b) (4 pts.) De acuerdo a lo expuesto anteriormente, es claro que el fenómeno de Gibbs hace que una aproximación parcial a una función sólo considerando contenido de baja frecuencia no sea muy útil para hacer cálculos numéricos en las proximidades a una discontinuidad. Para esto, veremos una estrategia un poco distinta. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sea una función integrable y periódica de período 2π. Definimos su aproximación mediante una Serie de Fourier truncada de la forma:

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \quad \text{donde} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

Se define la *suma de Fejér* de orden n de la función $f(x)$ como

$$F_n f(x) = \frac{1}{n+1} (S_0 f(x) + S_1 f(x) + \cdots + S_n f(x))$$

Como vemos, esta suma considera un promedio de las primeras n aproximaciones a una función $f(x)$ mediante Series de Fourier truncadas. De esta forma se pueden minimizar las oscilaciones que ocurren en las discontinuidades producto del fenómeno de Gibbs. Muestre que $S_n f(x)$ y $F_n f(x)$ pueden escribirse como las convoluciones periódicas:

$$S_n f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) D_n(u) du \quad \text{y} \quad F_n f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \Phi_n(u) du$$

La pregunta 3 continúa en la página siguiente ...

donde $D_n(u)$ y $\Phi_n(u)$ se denominan los *núcleos* (kernels) de *Dirichlet* y *Fejér* respectivamente. Determine una expresión analítica para ambos núcleos.

Solución

(a) La función aproximante es simplemente la Transformada Inversa de $F(u)$ multiplicada por un $\sqcap$ de ancho 2ξ, es decir:

$$f_\xi(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(u) \sqcap (\frac{u}{2\xi})\} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Por lo tanto, aplicando la propiedad de la convolución y del escalamiento:

$$f_\xi(x) = f(x) * 2\xi \text{sinc}(2\xi x) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

por lo que

$$g(x,\xi) = 2\xi \text{ sinc}(2\xi x) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(b) Dado que $g(x,\xi)$ es un sinc que se hace cada vez más angosto, es claro que:

$$\lim_{\xi\to+\infty} g(x,\xi) = \delta \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Entonces, de acuerdo a lo anterior:

$$\lim_{\xi\to+\infty} f_\xi = \lim_{\xi\to+\infty} f(x) * g(x,\xi) = f(x) * \lim_{\xi\to+\infty} g(x,\xi) = f(x) * \delta = f(x) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Comprobamos que, en el límite, esta función aproximante en efecto converge, en el sentido de las distribuciones, a $f(x)$.

(c) Considerando $f(x) = \sqcap(x)$, entonces

$$\sqcap_\xi(x) = \sqcap(x) * 2\xi \text{ sinc}(2\xi x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqcap(x-\tau) 2\xi \text{ sinc}(2\xi\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{x} 2\xi \text{ sinc}(2\xi\tau) d\tau \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Esta integral la podemos dividir en las siguientes dos integrales

$$\sqcap_\xi(x) = \int_{-\infty}^{0} 2\xi \text{ sinc}(2\xi\tau) d\tau + \int_{0}^{x} 2\xi \text{ sinc}(2\xi\tau) d\tau$$

La primera integral de la izquierda es simplemente la mitad de la Transformada de Fourier de 2ξ sinc$(2\xi x)$ evaluada en cero. Es decir, $1/2$ $\rightarrow$ $\boxed{\textbf{1 pt.}}$

La segunda integral, aplicando un simple cambio de variables, es:

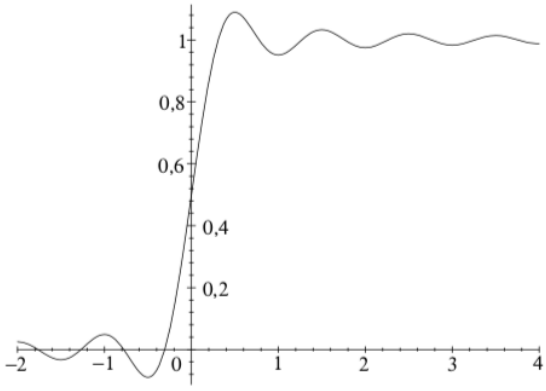
$$2\xi \int_0^x \frac{\sin(2\pi\xi\tau)}{\pi 2\xi\tau} d\tau = \int_0^x \frac{\sin(2\pi\xi\tau)}{\pi\tau} d\tau = \frac{1}{\pi}\text{Si}(2\pi\xi x) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Finalmente,

La pregunta 3 continúa en la página siguiente ...

$$\boxed{\sqcap_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{Si}(2\pi\xi x)}$$

El siguiente gráfico muestra $\sqcap_1(x)$, donde se aprecian claramente las oscilaciones en torno a la discontinuidad producto del fenómeno de Gibbs



(d) Podemos escribir la aproximación a $f(x)$ como

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right) e^{ikx}$$

simplemente reemplazando los coeficientes de Fourier c_k por su definición. Reagrupando los términos tenemos

$$S_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-\xi)} d\xi$$

Haciendo un cambio de variables, es trivial probar que:

$$S_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-\xi) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\xi} d\xi$$

por lo que

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

tal como fue visto en clases.

La suma de Fejér es

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k f(x)$$

Introduciendo el resultado anterior en la suma de Fejér obtenemos:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-\xi)D_k(\xi)\right)d\xi$$

Reagrupando

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-\xi)\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(\xi)\right)d\xi$$

por lo que

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x) \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

4. (16 pts.) **La ecuación de Schrödinger**[1]. La versatilidad de la Transformada de Fourier la hace una herramienta muy útil para resolver ecuaciones que de otra forma serían muy difíciles. Veremos una aplicación de Fourier en física cuántica. El estado de una partícula está completamente caracterizado por una función compleja $\Psi(x,t)$, llamada *función de onda*, o *wavefunction*. La posibilidad de encontrar a esta partícula entre las posiciones x y $x+dx$ en el instante t esta dada por la distribución de probabilidades $|\Psi(x,t)|^2dx$. La Transformada de Fourier de la función de onda respecto a la posición, definida como

$$\varphi(p,t) = \frac{1}{\sqrt{h}}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(x,t)e^{-\frac{i2\pi px}{h}}dx$$

donde h es la constante de Planck, es tal que la probabilidad que la partícula tenga un momentum entre p y $p+dp$ en el instante t es $|\varphi(p,t)|^2dp$.

(a) (4 pts.) La función de onda de una partícula libre de masa m satisface la famosa ecuación de Schrödinger

$$2\pi ih\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{-h^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2}$$

i. (2 pts.) Utilice la Transformada de Fourier para determinar la ecuación que satisface φ.

ii. (2 pts.) Demuestre que $\varphi(p,t) = \varphi(0,t)e^{-i2\pi E(p)t/h}$ y determine $E(p)$. ¿Qué representa E?

(b) (2 pts.) Utilice la Transformada inversa de Fourier para demostrar que la función de onda en el instante t es una superposición de ondas planas de la forma $e^{\frac{i2\pi}{h}(px-E(p)t)}$ de momentum p y energía $E(p)$.

(c) (2 pts.) Si $\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi(x,t)|^2dx = 1$, dado que es una distribución de probabilidades. ¿Cuánto vale $\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(p,t)|^2dp$?

(d) (6 pts.) Suponga que en el instante $t=0$ la función de onda se escribe

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_x)^{1/2}}e^{-\frac{x^2}{4\sigma_x^2}}e^{\frac{i2\pi p_0 x}{h}}$$

i. (2 pts.) Grafique $\mathrm{Re}\{\Psi(x,0)\}$ y $|\Psi(x,0)|^2$.

[1] En esta pregunta colaboraron Carlos Castillo y Fabián Cádiz

La pregunta 4 continúa en la página siguiente ...

ii. (2 pts.) ¿Cuál es el valor medio de la posición $\langle x \rangle$ y su incertidumbre (el centro y el ancho de $|\Psi|^2$) respectivamente?

iii. (2 pts.) Determine $\varphi(p, 0)$. Grafique $|\varphi(p, 0)|^2$ para la función de onda Ψ de la parte anterior.

iv. (2 pts.) Sin hacer ningún cálculo, determine el valor medio del momentum $\langle p \rangle$ y su incertidumbre (ancho de $|\varphi|^2$) Δp. Muestre que se cumple el principio de incertidumbre:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

HINT: La Transformada de Fourier de una función Gaussiana de la forma $e^{-\frac{x^2}{4\sigma_x^2}}$ es $e^{-\frac{4\pi^2 p^2 \sigma_x^2}{h^2}}$.

Solución

(a) i. Primero notamos que la Transformada de Fourier es en x, no en t. Además, en esta versión de la Transformada de Fourier, en vez de usar la variable de frecuencia u, usamos p/h. Por lo tanto, tomando la Transformada de Fourier de la ecuación de Schrödinger, y ocupando la propiedad de la derivada, nos da

$$2\pi i h \frac{\partial \mathcal{F}\{\Psi(x,t)\}}{\partial t} = -\frac{-h^2}{2m} \frac{i^2 4\pi^2 p^2}{h^2} \mathcal{F}\{\Psi(x,t)\} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

y sabemos que la Transformada de Fourier de la función de onda es $\varphi(p, t)$, por lo que

$$\frac{\partial \varphi(p,t)}{\partial t} = \frac{-i2\pi}{h} \frac{p^2}{2m} \varphi(p,t) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

ii. Como se trata de una ecuación diferencial de primer orden para $\varphi(p, t)$, la solución es claramente una exponencial de la forma

$$\varphi(p,t) = \varphi(0,t) e^{-i2\pi \frac{p^2}{2mh} t} = \varphi(0,t) e^{-i2\pi E(p) t/h} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

donde $E(p) = \frac{p^2}{2m}$ representa la energía cinética de una partícula de momentum p (tal como lo sugiere la letra E y lo dice el mismo enunciado! :) $\rightarrow$ **1 pt.**

(b) Dado que ahora tenemos una ecuación para el momentum, tomamos su Transformada de Fourier inversa respecto a p:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(0,t) e^{-i2\pi E(p)/h} e^{i2\pi p/hx} dp = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(0,t) e^{i2\pi(px - E(p)t)/h} dp \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

lo que claramente indica que la función de onda que describe el comportamiento de una partícula $\Psi(x, t)$ consiste de una superposición de ondas planas de la forma $e^{i2\pi(px - E(p)t)/h}$. Estas ondas fueron propuestas por Louis de Broglie, quien ganó el premio Nobel por el descubrimiento de la naturaleza ondular de los electrones!

(c) Ocupando el Teorema de Plancherel-Parseval, es evidente que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(p,t)|^2 dp = 1 \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

También es evidente porque es otra distribución de probabilidades.

La pregunta 4 continúa en la página siguiente ...

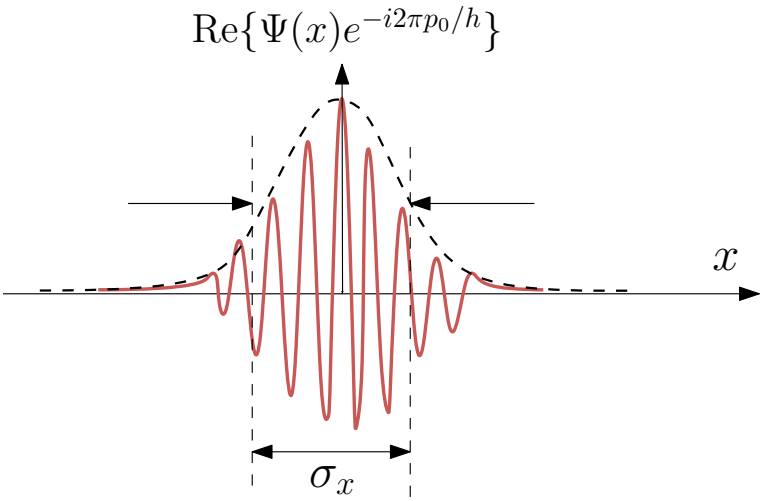
(d) En esta parte vemos que la función de onda adquiere la forma de una función Gaussiana multiplicada por una exponencial compleja:

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_x)^{1/2}} \underbrace{e^{-\frac{x^2}{4\sigma_x^2}}}_{\text{Gaussiana}} \underbrace{e^{\frac{i2\pi p_0 x}{h}}}_{\text{Exp. compleja}}$$

i. Por lo tanto la parte real es

$$\text{Re}\{\Psi(x,0)\} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_x)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma_x^2}} \cos(\frac{2\pi p_0 x}{h}) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

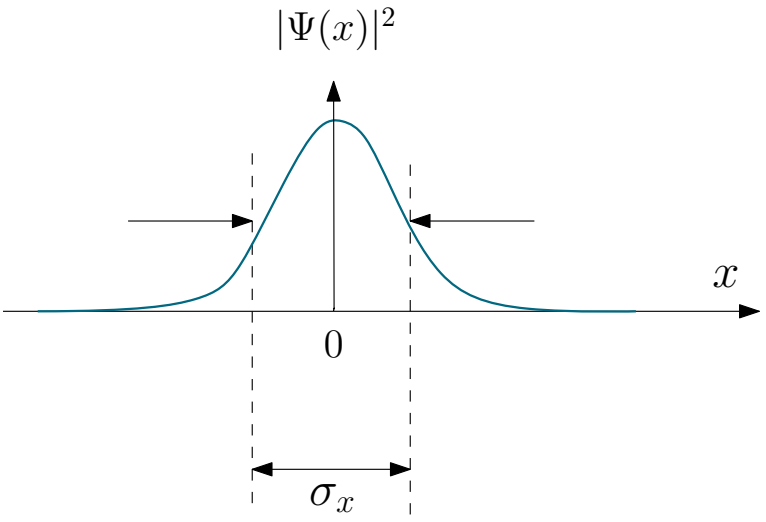
es decir, queda una Gaussiana multiplicada por un coseno, tal como lo muesta la siguiente figura:



Como la exponencial compleja tiene magnitud 1, entonces

$$|\Psi(x,0)|^2 = \left|\frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_x)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma_x^2}}\right|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Aquí está su gráfico



es decir, la densidad de probabilidades adquiere la forma de una Gaussiana.

ii. Recordemos que una función Gaussiana de la forma $e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$ tiene media μ y ancho σ. Entonces $|\Psi(x,0)|^2$ tiene media $\langle x\rangle = 0 \rightarrow$ **1 pt.** y ancho $\Delta x = \sigma_x \rightarrow$ **1 pt.**

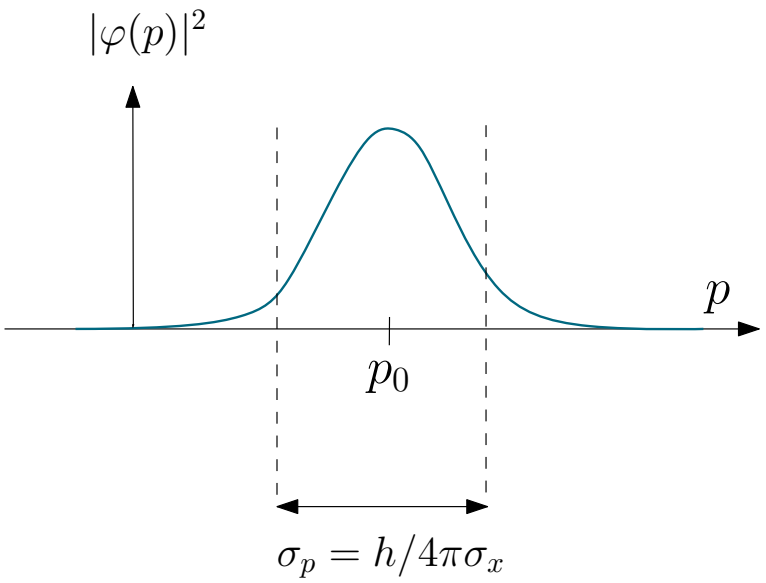
iii. La Transformada de Fourier de una Gaussiana es otra Gaussiana. De acuerdo al HINT, y considerando que multiplicar por una exponencial compleja en un dominio es un desfase en el otro dominio, entonces

$$\varphi(p,0) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_x)^{1/2}} e^{-\frac{4\pi^2(p-p0)^2\sigma_x^2}{h^2}} \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

Para calcular la densidad de probabilidades hay que tomar el módulo al cuadrado, tal como vimos anteriormente:

$$|\varphi(p,0)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{2(2\pi)^2(p-p0)^2\sigma_x^2}{h^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{\frac{-(p-p0)^2}{h^2/(2(2\pi)^2\sigma_x^2)}} \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

Vemos que en este caso la Gaussiana tiene media $\langle p\rangle = p_0$ y ancho $\Delta p = \frac{h}{4\pi\sigma_x}$, lo que se corrobora en la siguiente figura:



NOTA: El HINT del enunciado orignal tenía un error de tipeo. Decía : La Transformada de Fourier de una función Gaussiana de la forma $e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$ es $e^{-\frac{4\pi^2p^2\sigma_x^2}{h^2}}$.

Para quien se haya dado cuenta del error aplicando las propiedades de la Transformada de Fourier, un punto extra! Si alguien realizó los cálculos de ésta pregunta y de la que sigue considerando el factor de 2 adicional que aparece, se contarán como respuestas correctas.

iv. Es claro que

$$\Delta x \Delta p = \sigma_x \frac{h}{4\pi^2\sigma_x} = \frac{h}{4\pi} \rightarrow \textbf{2 pts.}$$