Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Tarea 2

Fecha de entrega: 20 de marzo de 2022

---

1. Demuestre que el área de un impulso es cero.

   Consideremos el impulso como distribución:

   $$< \delta, \phi >= \phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta \cdot \phi$$

   Ahora, si tomamos $\phi = 1(x)$ tendremos:

   $$< \delta, 1 >= 1(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta \cdot 1$$

   Luego, evaluendo 1 en cero y multiplicando por uno en la integral:

   $$< \delta, 1 >= 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta$$

2. Encuentre la derivada del impulso.

   Para resolver esto, usamos la propiedad de la derivada de una distribución: sea T una distribución sobre ϕ, la propiedad indica que

   $$< T', \phi >= - < T, \pi' >$$

   Luego, si se define δ como:

   $$< \delta, \phi >= \phi(0)$$

   La distribución derivada del impulso será:

   $$< \delta', \phi >= -\phi'(0)$$

3. Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'$$

Podemos reescribir la integral a desarrollar como una convolución a conveniencia:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) \cdot 1(t-x)dx = \{\delta' * 1\}(t)$$

Para abarcar este problema, nos conviene utilizar las propiedades de la convolución. En este caso tomamos en cuenta que:

$$h'(t) = \{f' * g\}(t) = \{f * g'\}(t)$$

Con esto en mente, podemos cambiar la función a derivar en la convolución de la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) \cdot 1(t-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot 1'(t-x)dx$$

Ahora, debemos calcular la derivada de la función 1. Dado que en la gráfica es una horizontal, tiene pendiente 0. Recordemos que la derivada de una constante es cero. Luego:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot 1'(t-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot 0(t-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cdot 0dx = 0$$

Finalmente, obtenemos que:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x)dx = 0}$$

4. Determine si la expresión $x\delta'(x) = -\delta(x)$ es verdadera o falsa

Podemos reescribir $x\delta'(x)$ como:

$$x\delta'(x) = \frac{d}{dx}[x\delta(x)] - \delta(x)$$

Ahora bien, sabemos que $f(x)\delta(x) = f(0)$ por lo que:

$$\frac{d}{dx}[x\delta(x)] = x(0) = 0$$

Por lo tanto:

$$x\delta'(x) = -\delta(x)$$

5. Calcule la convolución $\sqcap(x) * \sqcap(x)$

   Corresponde a la función triangulo

6. Suponga que alguien erróneamente cree que la regla de la cadena se aplica a la convolución, $(f * g)' = f' * g + f * g'$. Encuentre el error $e(x)$, la diferencia entre el resultado erróneo y el correcto, si $f(x) = \sqcap(x)$ y $g(x) = u(x)$.

   Para resolver este problema lo primero es saber que la propiedad de la derivada de la convolución es $(f * g)' = f' * g = f * g'$. Con esto establecido es que podemos calcular la diferencia entre el resultado de la supuesta regla de la cadena y la propiedad que será $e(x)$:

$$e(x) = f' * g + f * g' - (f * g)' = 2((f * g)') - (f * g)' = (f * g)'$$

   Como se pide el error cuando $f(x) = \sqcap(x)$ y $g(x) = u(x)$ es conveniente expresar esta última expresión como $f * g'$. De esta manera:

$$e(x) = \sqcap(x) * (u(x))' = \sqcap(x) * \delta(x) = \sqcap(x)$$