Interrogación 2

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo dos carillas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre en todas las hojas que ocupe. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.
- En esta interrogación sólo se considerarán 4 preguntas. Las preguntas 1, 2 y 3 son obligatorias. Elija responder la pregunta 4 o la pregunta 5.

---

1. (6 pts). Determine la validez de las siguientes igualdades

   (a) (3 pts.)
   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}^2(x-a)}{(x-a)^2} dx = \pi \quad \forall a \in \Re$$

   (b) (3 pts.)
   $$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(\omega t)}{1+\omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2} e^{-|t|}$$

   Solución:

   - Primero notamos que
   $$\frac{\text{sen}^2(x-a)}{(x-a)^2} = \text{sinc}^2\left(\frac{x-a}{\pi}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{i2\pi a}\pi \sqcap (\pi u) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$
   Sabemos por el Teorema de Parseval que
   $$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2\left(\frac{x-a}{\pi}\right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i2\pi a}\pi \sqcap (\pi u)|^2 du \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$
   $$= \pi^2 \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} du = \pi^2 \left(\frac{1}{2\pi} - -\frac{1}{2\pi}\right) = \pi^2 \frac{1}{\pi} = \pi$$
   Por lo tanto, la igualdad es verdadera, para todo valor de a. $\rightarrow$ **1 pts.**.
   - Primero notamos el par de Fourier
   $$e^{|-t|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2}{1+(2\pi u)^2} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$
   Por lo tanto, podemos escribir la función exponencial utilizando la Transformada inversa
   $$e^{|-t|} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi u t} \frac{2}{1+(2\pi u)^2} du$$

$$e^{|-t|} = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi ut)\frac{2}{1+(2\pi u)^2}du + \int_{-\infty}^{\infty} i\,\text{sen}\,(2\pi ut)\frac{2}{1+(2\pi u)^2}du \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

La segunda integral es cero, porque se trata de una función integrable e impar. La segunda integral es par. En consecuencia,

$$e^{|-t|} = 2\int_{0}^{\infty} \cos(2\pi ut)\frac{2}{1+(2\pi u)^2}du$$

Haciendo el cambio de variable $\omega = 2\pi u$, $d\omega = 2\pi du$, escribimos

$$e^{|-t|} = \int_{0}^{\infty} \frac{\cos(\omega t)}{2\pi}\frac{4}{1+\omega^2}d\omega$$

por lo tanto, la igualdad es verdadera:

$$\frac{\pi}{2}e^{|-t|} = \int_{0}^{\infty} \cos(\omega t)\frac{1}{1+\omega^2}d\omega \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

2. (6 pts.) Sea $\mathcal{F}\{\cdot\}$ la Transformada de Fourier. Además, sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones arbitrarias integrables.

   (a) (3 pts.) Demuestre la siguiente fórmula de transferencia

   $$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{f\}(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathcal{F}\{g\}(x)dx$$

   (b) (3 pts.) Sea $g(x)$ una función cualquiera y $f(x)$ la función delta $\delta(x)$. Utilice el resultado anterior para demostrar que la transformada de Fourier de una función delta es 1.

Solución:

(a) Utilizando la definición de la Transformada de Fourier podemos re-escribir el lado izquierdo de la igualdad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i2\pi ux}du\}g(x)dx \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Como $f(x)$ y $g(x)$ son integrables, poseen Transformadas de Fourier y podemos intercambiar el orden de integración $\rightarrow$ **1 pts.** y escribir:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\{\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i2\pi ux}dx\}du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\mathcal{F}\{g\}(u)du \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

como la variable de integración es muda, se demuestra la igualdad.

(b) Tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathcal{F}\{g\}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{\delta\}(x)g(x)dx \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

El lado izquierdo, por la propiedad del cedazo es $G(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx.$ $\rightarrow$ **1 pts.** Es evidente entonces que

$$\mathcal{F}\{\delta\}(x) = 1 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

3. (5 pts.) Encuentre los coeficientes de la serie Fourier de

$$f(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{i2\pi x/T}},$$

luego grafique su transformada de Fourier y relacione ésta con la serie. ¿Cuáles son los coeficientes de $f(ax)$?

Solución:

Como es usual expandimos la suma geométrica

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{i2\pi \frac{n}{T} x}.$$

De lo que se obtiene de forma trivial que $C_n = 2^{-n} \sqcap [n]$.→ **1 pts.**

Luego el gráfico de la transformada de Fourier es y su relación con la serie es la siguiente → **2 pts.**

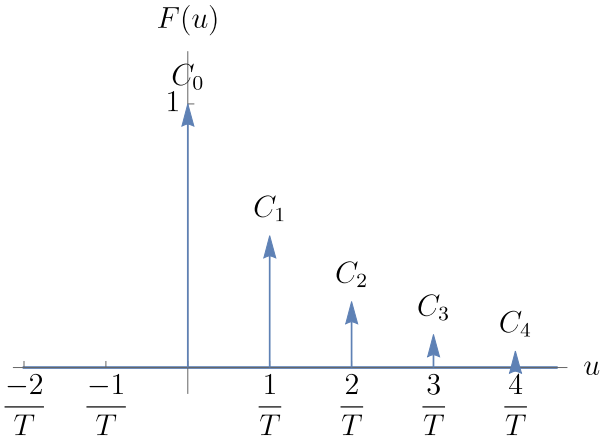


Figure 1: Fourier y su relación

Para el caso de los coeficientes de $f(ax)$ estos serán exactamente los mismos C_n. → **2 pts.**.

4. (8 pts). El espectrograma $\mathcal{S}(u,t)$ de una señal representa el contenido de frecuencias u para un instante de tiempo t en una imagen. Se requiere conocer el espectrograma de una señal $f(t) = \cos\left(2\pi t^2\right)$ después de pasar por un proceso de muestreo, consistente en una multiplicación por un $\sqcup\!\sqcup$ de acuerdo a:

$$f_s(t) = \frac{1}{T}\sqcup\!\sqcup\left(\frac{t}{T}\right) f(t)$$

Dibuje $\mathcal{S}(u,t)$ de $f_s(t)$ y vea que es lo que sucede en $u \in \left[0, \frac{1}{T}\right]$ y $t \in \left[0, \frac{5}{T}\right]$.

Indicación: Trate de escribir $f(t)$ como una onda cuya frecuencia u_t varia en el tiempo.

Solución:

Nos damos cuenta que

$$f(t) = \cos\left(2\pi u_x t\right), \quad \text{con } u(t) = t. \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Ahora analicemos que pasará para un tiempo en particular

$$f_s(t) = \frac{1}{T}\sqcup\!\sqcup\left(\frac{t}{T}\right)\cos\left(2\pi u_t t\right) \rightarrow \tilde{F}(u) = \sqcup\!\sqcup(Tu) * \frac{1}{2}\left[\delta(u+u_t) + \delta(u-u_t)\right] \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}.$$

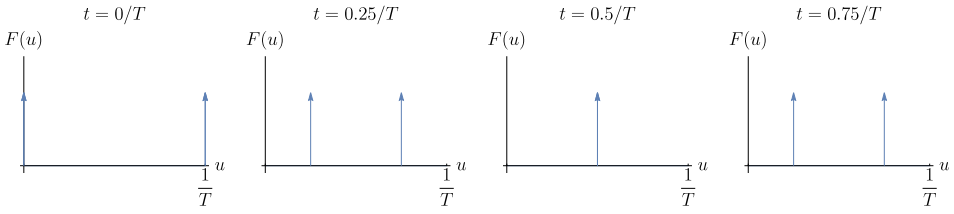


Figure 2: Frecuencia interpretada en el tiempo

$\rightarrow$ **2 pts.**

Por lo que la frecuencia que varia en el tiempo a veces será interpretada como una frecuencia ascendente o una decreciente según el instante de tiempo

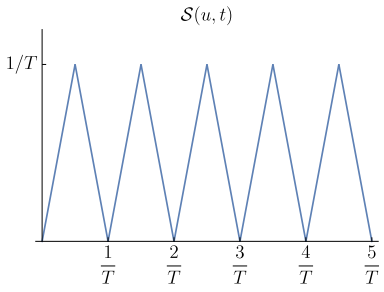


Figure 3: Espectrograma de la señal pedida.

$\rightarrow$ **2 pts.**

5. (8 pts). Sea $x(t)$ una señal desconocida que es modulada con una señal portadora $\cos(50t)$ para producir una señal $s(t)$ transmitida mediante una antena emisora. Al llegar a una antena receptora, ésta se demodula con una señal también desconocida $f(t)$. El resultado luego se pasa por un filtro pasabajos ideal (LPF) con frecuencia de corte $\omega = 20$[rad/s]. Así, se obtiene una señal de salida $y(t)$, tal como lo muestra la siguiente figura:

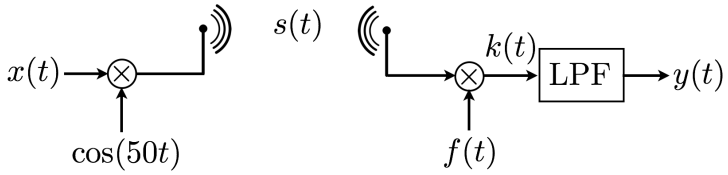


Figure 4: Sistema de comunicaciones.

.

$X(\omega)$, la Transformada de Fourier de $x(t)$, se muestra en el siguiente diagrama. Se observa que es una señal de ancho de banda limitada, es decir, no posee frecuencias fuera del rango $[-1, 1]$. Recuerde que $\omega = 2\pi u$.

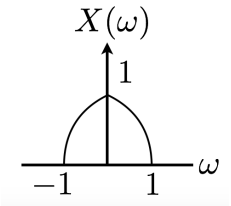


Figure 5: Espectro de frecuencias de $x(t)$.

.

(a) (2 pts.) Grafique $S(\omega)$, la Transformada de Fourier de $s(t)$.

(b) (2 pts.) Si $f(t) = 4\cos(50t)$, grafique $K(\omega)$, la Transformada de Fourier de $k(t)$. Indique las magnitudes máximas que esta señal puede alcanzar.

(c) (2 pts.) Para el caso anterior, encuentre la salida $y(t)$.

(d) (2 pts.) Si ahora $f(t) = 4\,\text{sen}\,(50t)$, encuentre la salida $y(t)$. Puede utilizar un gráfico, pero haga explícita su respuesta.

Solución:

(a) La modulación produce una convolución con una horquilla centrada en la frecuencia de la portadora → **1 pts.**, por lo tanto:

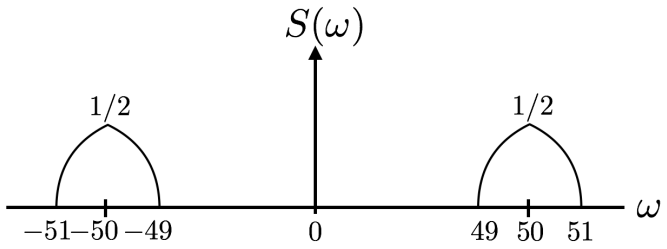


Figure 6: Espectro de frecuencias de $s(t)$.

→ **1 pts.**

(b) Tenemos que
$k(t) = s(t) \times f(t) = s(t) \times 4\cos(50t)$
En Fourier,

$$K(\omega) = S(\omega) * \frac{1}{2\pi}\left(4\pi\delta(\omega-50) + 4\pi\delta(\omega+50)\right) = 2S(\omega-50) + 2S(\omega-50) \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

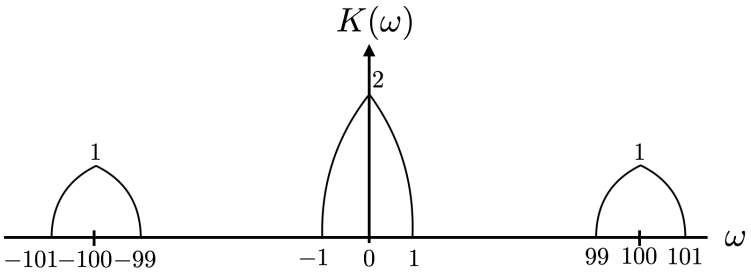


Figure 7: Espectro de frecuencias de $k(t)$.

→ **1 pts.**

(c) Del gráfico anterior se observa que el filtro pasa-bajos elimina las copias de los espectros centrados en -100 y 100 Hz, por lo que $Y(\omega) = 2X(\omega)$→ **1 pts.**, por lo tanto $y(t) = 2x(t)$→ **1 pts.**.

(d) Tenemos que
$k(t) = s(t) \times f(t) = s(t) \times 4\,\text{sen}\,(50t)$
En Fourier,

$$K(\omega) = S(\omega) * \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4\pi}{i}\delta(\omega-50) + \frac{4\pi}{i}\delta(\omega+50)\right) = \frac{1}{i}\left(2S(\omega-50) + S(\omega-50)\right) \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

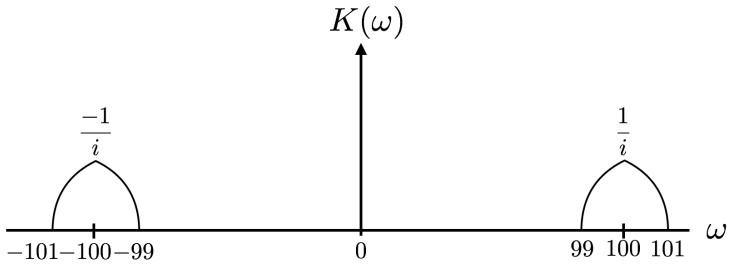


Figure 8: Espectro de frecuencias de $k(t)$.

Claramente en este caso $y(t) = 0 \rightarrow$ **1 pts.**.