Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Control 11

11 de Noviembre 2022

Responda las siguientes 3 pregutnas

1. Explique la relación entre la transformada z y la transformada de Laplace de tiempo discreto.

   Es posible definir una transformada de Laplace de tiempo discreto $DTLT$ de la forma:

   $$DLFT\{f[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]e^{-sn}$$

   Dada la definición de la variable z, podemos hacer el cambio de variable $z = e^s$ y se obtiene la transformada z:

   $$\mathcal{Z}\{f[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]z^{-n}$$

2. Determine la transformada Z de la función (considerando u escalon):

   $$f[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

   Para resolver esto, nuevamente reemplazamos en la fórmula:

   $$\mathcal{Z}\{f[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

   Utilizando la multiplicación por escalón:

   $$\mathcal{Z}\{f[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

   Re escribiendo:

   $$\mathcal{Z}\{f[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^{-1}}{2}\right)^n$$

Haciendo el mismo análisis que en la pregunta 5, establecemos que si $|z^{-1}/2| < 1$ la serie geométrica que se forma converge, es decir, se requiere que $|z^{-1}| < 2$ para que la suma sea convergente. Entonces:

$$\mathcal{Z}\{f[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^{-1}}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{z^{-1}}{2}} \quad \text{Si}|z| > \frac{1}{2}(\text{ROC})$$

3. La respuesta al escalón de un sistema LTI discreto es $f_u[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$. Encuentre la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema utilizando propiedades de la transformada z.

Tomando la transformada Z:

$$H(z) = \frac{\frac{2}{1-(\frac{1}{3})z^{-1}}}{\frac{1}{1-z^{-1}}} = \frac{2z-2}{z-\frac{1}{3}}$$

Para calcular la inversa podemos utilizar el método de los residuos. Sabemos que hay un polo en $z = \frac{1}{3}$. Entonces, el residuo correspondiente a ese polo es:

$$\lim_{z\to\frac{1}{3}} \left\{ z^{n-1} \frac{2z-2}{z-\frac{1}{3}} \left(z-\frac{1}{3}\right) \right\} = -4\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Notamos además que el término z^{n-1} introduce un polo en $z = 0$, para $n = 0$. Entonces este residuo es:

$$\lim_{z\to 0} z^{-1} \frac{2z-2}{z-\frac{1}{3}} z = 6$$

Por lo tanto, la respuesta al impulso es

$$h[n] = 6\delta[n] - 4\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$