# Interrogación 3

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo dos carillas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre en todas las hojas que ocupe. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. (12 pts.) **Propiedades de DFT.** Considere que la DFT de la secuencia $f[n] = [a, b, c, d]$ es $F[k] = [A, B, C, D]$. Utilice las propiedades de la DFT para expresar en función de $A$, $B$, $C$ y $D$ las DFT de:

   (a) (3 pts.) $f_1[n] = [c, 0, 0, 0]$

   (b) (3 pts.) $f_2[n] = [a, 0, c, 0]$

   (c) (3 pts.) $f_3[n] = [b, 0, d, a]$

   (d) (3 pts.) $f_4[n] = [0, d, 0, b]$

   **Solución:**

   (a) Primero consideramos que $[0, 0, c, 0] = [a, b, c, d]\delta[n-2]$, por lo tanto la DFT es $[A, B, C, D] *_\ell DFT\delta[n-2] \rightarrow$ **1 pts.**.

   Como tenemos que $DFT\delta[n-2] = \frac{1}{4}[1, -1, 1, -1]$, entonces la DFT de $[0, 0, c, 0]$ es:

   $$\frac{1}{4}[A - B + C - D, -A + B - C + D, A - B + C - D, -A + B - C + D] \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

   Luego, por propiedad de desplazamiento, la DFT de $[c, 0, 0, 0]$ es:

   $$\frac{1}{4}[A - B + C - D, -(-A + B - C + D), A - B + C - D, -(-A + B - C + D)]$$

   $$= \frac{A - B + C - D}{4}[1, 1, 1, 1] \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

   (b) Tenemos que $[a, 0, 0, 0] = [a, b, c, d]\delta[n]$, y como la DFT de $\delta[n] = 1[n]/N \rightarrow$ **1 pts.**, entonces la DFT de $[a, 0, 0, 0]$ es:

   $$\frac{A + B + C + D}{4}[1, 1, 1, 1] \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

   Luego por linealidad, como $[a, 0, c, 0] = [a, 0, 0, 0] + [0, 0, c, 0]$, la DFT buscada es:

   $$\frac{1}{2}[A + C, B + D, A + C, B + D] \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

(c) Primero buscamos la DFT de $[a,b,0,d] = [a,b,c,d] - [0,0,c,0] \rightarrow$ **1 pts.**, la que es:

$\frac{1}{4}[3A+B-C+D, A+3B+C-D, -A+B+3C+D, A-B+C+3D] \rightarrow$ **1 pts.**

Luego usamos propiedad de desplazamiento, y obtenemos que la DFT de $[b,0,d,0]$ es:

$\frac{1}{4}[3A+B-C+D, j(A+3B+C-D), -(-A+B+3C+D), -j(A-B+C+3D)] \rightarrow$ **1 pts.**

(d) Notamos que la DFT de $f[-n]$ es $F^*[k]$, es decir, conjugamos la DFT al invertir en el tiempo $\rightarrow$ **1 pts.**

Luego como $[0,d,0,b]$ es la inversa en el tiempo de $[0,b,0,d] \rightarrow$ **1 pts.**, tenemos que la DFT buscada es:

$$\frac{1}{2}[A^* - C^*, B^* - D^*, C^* - A^*, D^* - B^*] \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

2. (6 ptos.) **Circshift.** Jugando con MATLAB se da cuenta que la función `circshift`, teóricamente hace lo siguiente

$$\text{circshift}_k\left\{\tilde{f}\,[n]\right\} = \tilde{f}\,[n-k]\,.$$

Luego de esto escribe el siguiente código:

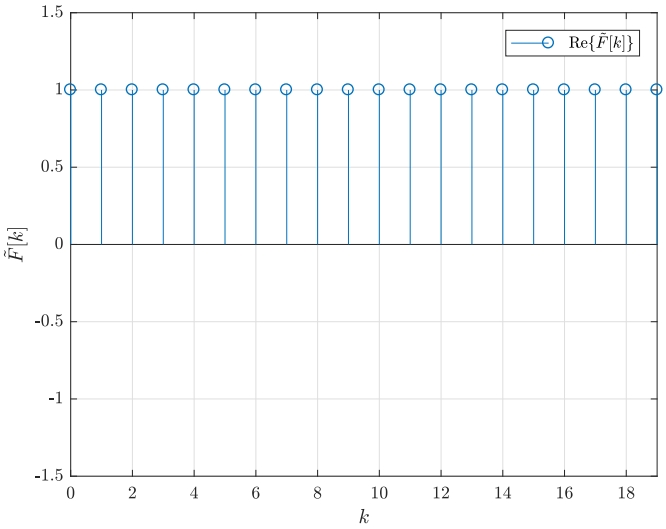
**Código.m**

```
N = 20; n = 0:N-1;
f = N*(n==0);
F = fft(f)/N;
f4 = circshift(f,N/4);
F4 = fft(f4)/N;
f2 = circshift(f,N/2);
F2 = fft(f2)/N;
```

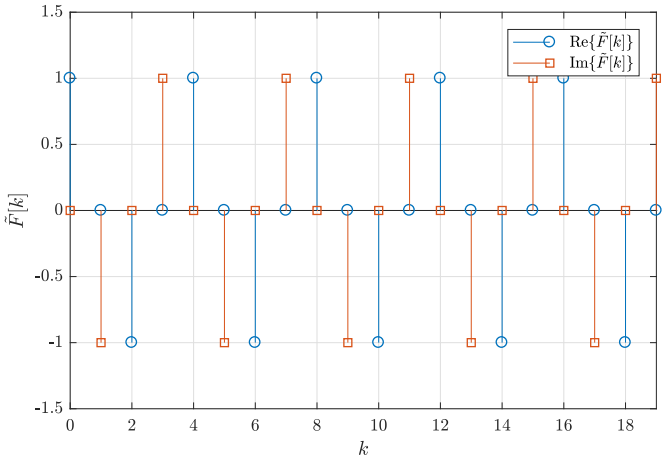
Grafique el resultado de `F`, `F4` y `F2`.

**Solución:**

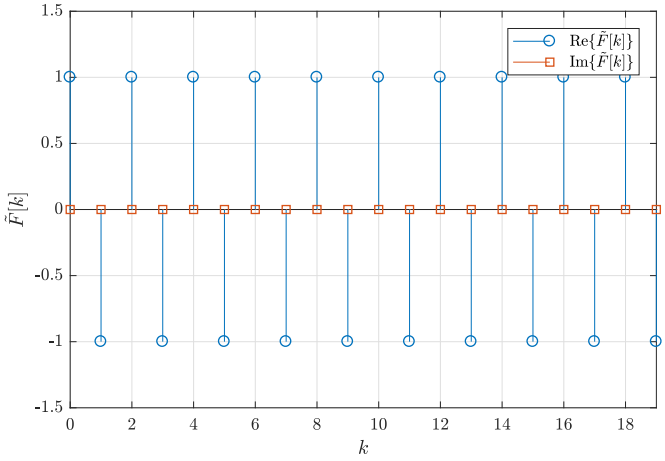
Primero que todo vemos que $\tilde{f}\,[n] = N\delta\,[n]$, por lo que $\tilde{F}\,[k] = 1$. La figura entonces será→ **2 pts.**



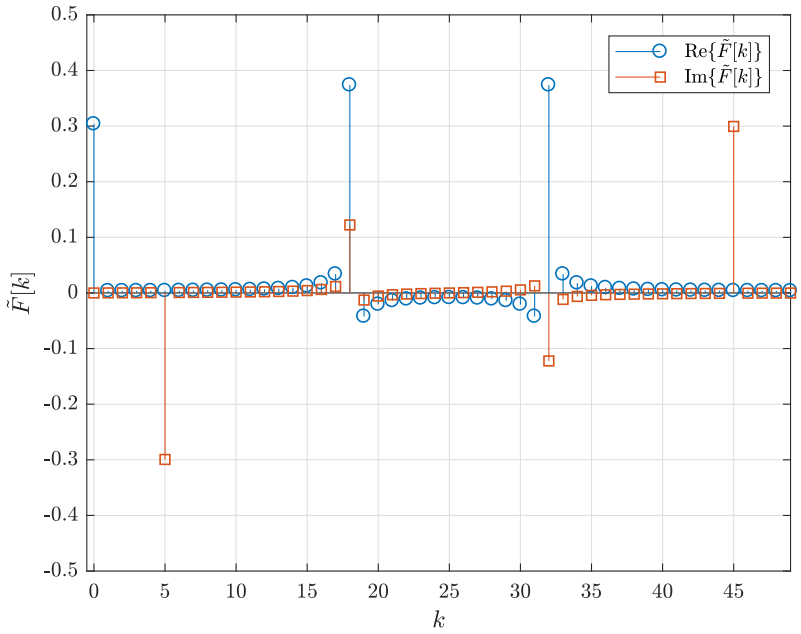

Para el segundo vemos que $\tilde{f}\,[n-N/4] \to \tilde{F}\,[k]\cdot(-i)^k$, por lo que su figura es→ **2 pts.**




Finalmente, al hacer un circshift en $N/2$ es equivalente a hacer un fftshift, por lo que $\tilde{f}[n] \rightarrow \tilde{F}[k] \cdot (-1)^n$ y su gráfico es→ **2 pts.**



3. (10 pts.) **Vibraciones.** Usted tiene datos $\tilde{f}\,[n]$ tomados con un acelerómetro posicionado en una máquina que se mueve a aceleración constante $A$. Se desea saber dicha aceleración, pero las vibraciones mecánicas $\tilde{\nu}\,[n]$ lo impiden. A continuación se muestra la transformada de $\tilde{f}\,[n] = A + \tilde{\nu}\,[n]$:




(a) (1 pto.) Determine la aceleración $A$.

(b) (4 ptos.) Encuentre las frecuencias de las vibraciones, use como tiempo de muestro $T = 1\,\text{s}$.

(c) (3 ptos.) Escriba explícitamente la aceleración $\tilde{f}\,[n]$.

(d) (2 ptos.) Calcule la potencia media de las vibraciones $\tilde{\nu}\,[n]$.

**Solución:**

(a) El valor de $A$ será el valor DC de la señal

$$\begin{aligned} A &= \tilde{F}\,[0] \\ &= 0.3\,\text{m/s}. \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}} \end{aligned}$$

(b) Para determinar las frecuencias de las vibración vemos que hay un *peak* en $k_1 = 5$ y $k_2 \approx 18.1$ (con derrame)$\rightarrow$ **2 pts.**, tenemos que como $NUT = 1$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{N} \\ &= \frac{1}{50}. \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}} \end{aligned}$$

Por lo que $f_1 = 5U = 0.1\,\text{Hz}$ y $f_2 \approx 18.1U = 0.362\,\text{Hz}. \rightarrow$ **1 pts.**

(c) Dado lo anterior notamos que el tono en $f_1$ es una anti hoquilla imaginaria y que el tono en $f_2$ es una horquilla por lo tanto sus alturas serán la mitad de las amplitudes del seno y coseno respectivos

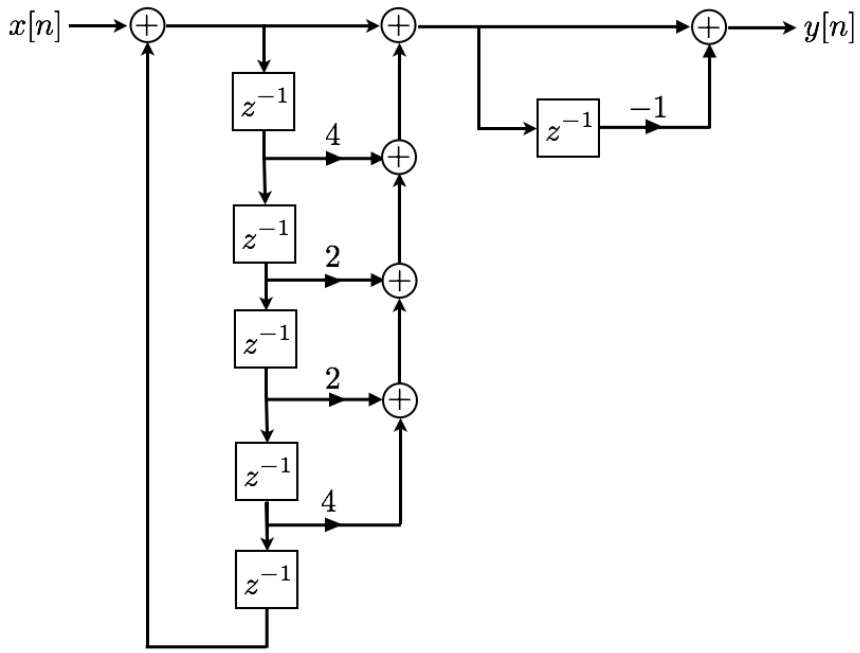
$$f[n] = A + B\,\sin\left(2\pi f_1 \frac{n}{N}\right) + C\,\cos\left(2\pi f_1 \frac{n}{N}\right).\rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Con amplitudes $B = 0.3 \cdot 2 = 0.6\,\mathrm{m/s}$ y $C \approx 0.4 \cdot 2 = 0.8\,\mathrm{m/s}.\rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$

(d) De este modo la potencia de las vibraciones será

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{P}}\left\{\tilde{\nu}[n]\right\} &= \sum_{k=0}^{N-1}\left|\tilde{F}[k]\right|^2 \\ &\approx \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{2}C^2 \\ &= \frac{1}{2}.\rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}\end{aligned}$$

4. (8 pts.) **Respuesta al impulso**. Determine la respuesta al impulso del sistema descrito por el siguiente diagrama de bloques.




**Solución:**

La forma más simple de resolver este problema es analizando directamente el diagrama de bloque. La estructura de la izquierda genera una respuesta al impulso períodica → **1 pts.**, de período 5 → **1 pts.**, de la forma

$$1, 4, 2, 2, 4, 1, 4, 2, 2, 4, 1, 4, 2, 2, 4, \ldots \rightarrow \textbf{2 pts.}$$

Luego vemos que a esta salida se le resta la misma salida desfasada en 1. Por lo tanto tenemos

$$\begin{array}{r} 1, 4, 2, 2, 4, 1, 4, 2, 2, 4, 1, 4, 2, 2, 4, \ldots \\ - \\ 0, 1, 4, 2, 2, 4, 1, 4, 2, 2, 4, 1, 4, 2, 2, \ldots \\ \hline 1, 3, -2, 0, 2, -3, 3, -2, 0, 2, -3, 3, \ldots \end{array}$$

→ **4 pts.**

5. (13 pts.) **Análisis de sistema.** Considere el sistema discreto descrito por su función de transferencia:

$$H(z) = \frac{(z+1)(z^2-2z+2)}{(z-0.8)(z^2-z+0.5)}$$

(a) (3 pts.) Encuentre la salida del sistema a la entrada $x[n] = 2^n \sqcap[n]$.

(b) (2 pts.) Encuentre la salida del sistema a la entrada $x[n] = 2^n \sqcap[n-N]$.

(c) (2 pts.) Encuentre la salida del sistema a la entrada $x[n] = 2^{n-N} \sqcap[n-N]$.

(d) (2 pts.) Encuentre la salida estacionaria (cuando $n \to \infty$) del sistema a la entrada $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sqcap[n]$.

(e) (2 pts.) Encuentre la salida estacionaria (cuando $n \to \infty$) del sistema a la entrada $x[n] = 5\sqcap[n]$.

(f) (2 pts.) Encuentre la salida estacionaria (cuando $n \to \infty$) del sistema a la entrada $x[n] = \left(\frac{3}{2}\right)^n \sqcap[n]$.

**Solución:**

(a) En primer lugar, observamos que las señales de entrada son derechas, por lo tanto podemos utilizar el hecho que en este caso estas exponenciales son autofunciones de los sistemas LTI, es decir

$$z^n \to H(z)z^n \to \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

En este caso

$$2^n \sqcap[n] \to H(2)2^n \sqcap[n]$$

Entonces hay que encontrar $H(2)$

$$H(2) = \frac{3 \times 2}{1.2 \times 2.5} = \frac{6}{3} = 2 \to \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

por lo tanto

$$y[n] = 2 \times 2^n \sqcap[n] = 2^{n+1} \sqcap[n] \to \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

.

(b) Como el sistema es inviariante $\to \boxed{\textbf{1 pts.}}$, entonces

$$y[n] = 2 \times 2^n \sqcap[n-N] = 2^{n+1} \sqcap[n-N] \to \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

.

(c) Como el sistema es inviariante $\to \boxed{\textbf{1 pts.}}$, entonces

$$y[n] = 2 \times 2^{n-N} \sqcap[n-N] = 2^{n-N+1} \sqcap[n-N] \to \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

.

(d) Usando el teorema del valor final (ver pregunta 7)

$$\lim_{n\to\infty} y[n] = \lim_{z\to 1}(z-1)H(z)X(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)H(z)\frac{z}{z-\frac{1}{2}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Tomando el límite,

$$\lim_{n\to\infty} y[n] = 0 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(e) Usando el teorema del valor final (ver pregunta 7)

$$\lim_{n\to\infty} y[n] = \lim_{z\to 1}(z-1)H(z)X(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)H(z)\frac{5z}{z-1} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Tomando el límite,

$$\lim_{n\to\infty} y[n] = \frac{5\times 2\times 1}{0.2\times 0.5} = \frac{10}{0.1} = 100 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(f) En este caso, la exponencial de entrada diverge en el infinito $\rightarrow$ **1 pts.**, por lo que claramente

$$\lim_{n\to\infty} y[n] = \infty \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

6. (12 pts.) **Filtro misterioso.** Considere un filtro de largo $N$, que tiene los siguientes coeficientes $a[k]$:

$$a[k] = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ g, & k = M \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obviamente, $N > M$.

(a) (2 pts.) Encuentre una expresión para la función de Transferencia del filtro

(b) (3 pts.) Grafique la respuesta de frecuencia en magnitud y fase, en el rango $-\pi, \pi$, destacando todos los puntos relevantes, para el caso $N = 5, M = 4$ y $g = 0.99$.

(c) (2 pts.) Encuentre una expresión para la función de Transferencia del filtro inverso.

(d) (3 pts.) Grafique la respuesta de frecuencia en magnitud y fase, en el rango $-\pi, \pi$, destacando todos los puntos relevantes, del filtro inverso para el caso $N = 5, M = 4$ y $g = 0.99$.

(e) (2 pts.) Grafique la respuesta de frecuencia en magnitud, en el rango $-\pi, \pi$, destacando todos los puntos relevantes, si se aplican el filtro y su inverso en serie.

**Solución:**

(a) La ecuación de diferencias de este filtro es

$$y[n] = x[n] + gx[n - M] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Tomando Transformada Z

$$Y(z) = X(z) + gz^{-M}X(z) = (1 + gz^{-M})X(z)$$

La función de transferencia es entonces

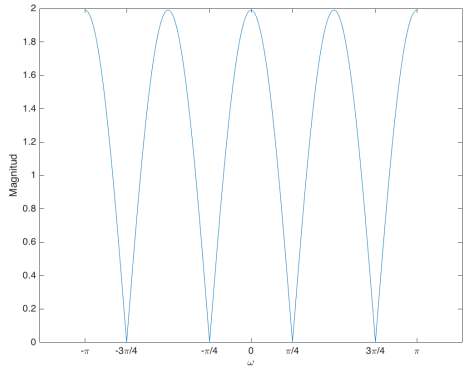
$$H(z) = 1 + gz^{-M} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(b) En la figura 1 se muestran los gráficos $\rightarrow$ **2 pts.**:
Se observan que en la posiciones de los ceros la respuesta de magnitud tiende a cero, y además esto genera cambios de fase en las mismas posiciones $\rightarrow$ **1 pts.**.

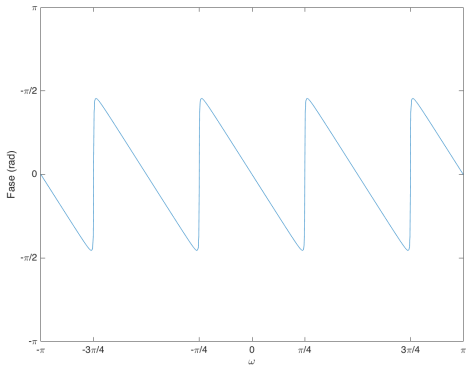
(c) El filtro inverso se hace intercambiando ceros por polos y viceversa $\rightarrow$ **1 pts.**, por lo tanto

$$H_{\text{inv}}(z) = \frac{1}{1 + gz^{-M}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

(d) En la figura 2 se muestran los gráficos $\rightarrow$ **2 pts.**:
Se observan que en la posiciones de los polos la respuesta de magnitud tiende a infinito, y además esto genera cambios de fase en las mismas posiciones $\rightarrow$ **1 pts.**.

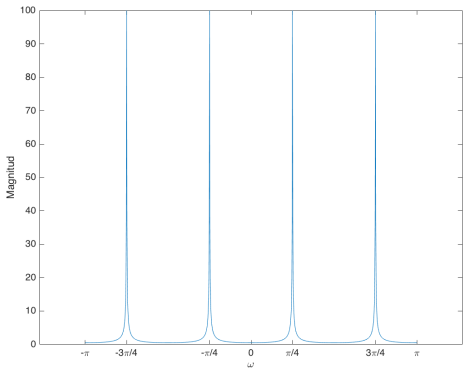



(a) Respuesta de magnitud

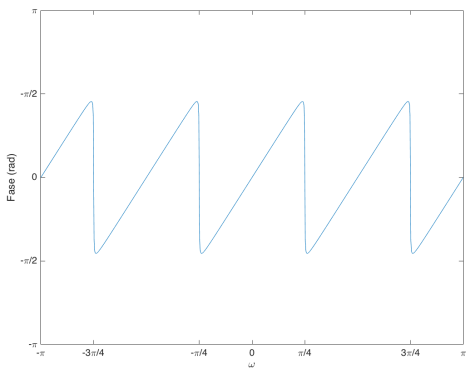



(b) Respuesta de fase

Figure 1: Respuestas de magnitud y fase




(a) Respuesta de magnitud




(b) Respuesta de fase

Figure 2: Respuestas de magnitud y fase

(e) En la figura 3 se muestra la respuesta de magnitud → **1 pts.**:
Es evidente que la aplicación de un filtro con su inverso en serie debe dar una constante en la respuesta de magnitud → **1 pts.**.

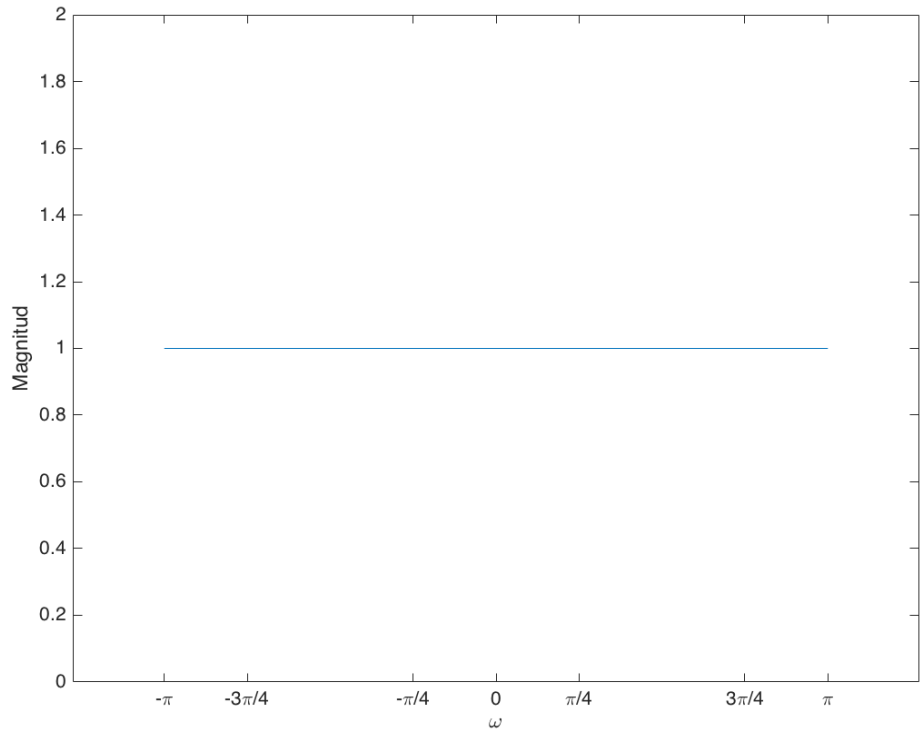



Figure 3: Respuesta de magnitud

7. BONUS (6 pts.) **Teorema del valor final**. Pruebe el siguiente teorema del valor final para la Transformada Z

$$\lim_{n\to\infty} f[n] = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$

**Solución:**

En primer lugar, el límite de la función $f[n]$ debe existir para que este teorema tenga sentido. Tomemos la Transformada Z de la primera diferencia,

$$\mathcal{Z}\{f[n+1]-f[n]\} = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(f[m+1]-f[m]\right)z^{-m} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Tomando Transformada Z y usando la propiedad de desplazamiento en el tiempo:

$$z\left(F(z)-f[0]\right)-F(z) = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(f[m+1]-f[m]\right)z^{-m} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Tomando el límite cuando $z \to 1$ en ambos lados

$$\lim_{z\to 1}\{(z-1)F(z)-zf[0]\}=\lim_{z\to 1}\{\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(f[m+1]-f[m]\right)z^{-m}\}\rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Tomando el primer límite:

$$\lim_{z\to 1}\{(z-1)F(z)\}-f[0]=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(f[m+1]-f[m]\right)\rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

$$\lim_{z\to 1}\{(z-1)F(z)\}-f[0]=\lim_{n\to\infty}\left(f[1]-f[0]+f[2]-f[1]+\cdots+f[n+1]-f[n]\right)\}\rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

$$\lim_{z\to 1}\{(z-1)F(z)\}-f[0]=\lim_{n\to\infty}\left(f[n+1]-f[0]\right)\}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}f[n]=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)}\rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$