IEE2103 - SEÑALES Y SISTEMAS

Interrogación 2

Prof. Rodrigo F. Cádiz

1er. semestre 2020
Tiempo: 3 hrs.
Puntos: 48
Fecha: 17/06/2020

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo dos carillas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre, rut, número de interrogación y número de pregunta en todas las hojas que ocupe. Las hojas sin esta información no serán corregidas.

---

1. (12 pts.) **Señal misteriosa**. Considere la señal definida por la función $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\cos(\theta)}d\theta$$

que satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0$$

(a) (8 pts.) Encuentre la Transformada de Laplace unilateral de $f(x)$.

(b) (4 pts.) Encuentre una expresión para:

$$\int_0^x f(\xi)f(x-\xi)d\xi \quad \forall x \geq 0$$

Solución

(a) Tomando Transformada de Laplace unilateral de la ecuación diferencial, y aplicando las propiedades de la multiplicación por x y de la derivada en x, tenemos que:

$$-\frac{d}{ds}\{s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\} + sF(s) - f(0) - \frac{d}{ds}\{F(s)\} = 0 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

$$-\frac{d}{ds}\{s^2F(s)\} + \underbrace{\frac{d}{ds}sf(0)}_{f(0)} + \underbrace{\frac{d}{ds}f'(0)}_{0} + sF(s) - f(0) - F'(s) = 0 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

$$-s^2F'(s) - 2sF(s) + f(0) + sF(s) - f(0) - F'(s) = -(s^2+1)F'(s) - sF(s) = 0 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Entonces tenemos que la Transformada de Laplace buscada satisface la siguiente ecuación diferencial:

La pregunta 1 continúa en la página siguiente ...

$$(s^2+1)F'(s)+sF(s)=0 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Reagrupando términos e integrando a ambos lados:

$$\int \frac{F'(s)}{F(s)}ds = -\int \frac{s}{s^2+1}ds + C$$

$$\ln\{F(s)\} = -\int \frac{s}{s^2+1}ds + C \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

La integral de la derecha se puede resolver fácilmente mediante el cambio de variables $u = s^2+1, du = 2s\,ds$

$$\ln\{F(s)\} = -\int \frac{s}{u}\frac{du}{2s} = -\int \frac{1}{2u}du = -\frac{1}{2}\ln(s^2+1) = -\ln(\sqrt{s^2+1})$$

Entonces,

$$F(s) = \frac{C}{\sqrt{s^2+1}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Para determinar la constante vemos, en base a la definición de $f(x)$, que $f(0)=1$. Por lo tanto, de acuerdo al Teorema del valor inicial tenemos que

$$f(0) = 1 = \lim_{s\to\infty} sF(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{sC}{\sqrt{s^2+1}} = C \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Finalmente,

$$\boxed{F(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(b) Dado que nos interesan señales causales, vemos que lo que se solicita es la convolución de la señal misteriosa multplicada por un escalón consigo misma. Es decir:

$$f(x)\sqcap(x) * f(x)\sqcap(x) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Entonces, en el dominio de Laplace:

$$F(s)F(s) = \frac{1}{s^2+1} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

cuya inversa es simplemente

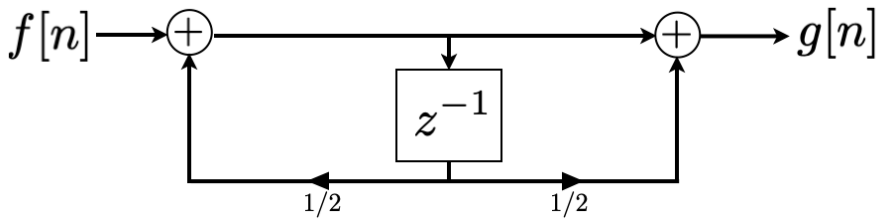
$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\} = \sin(t)\sqcap(t) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Por lo tanto, la expresión buscada es:

$$\boxed{\int_0^x f(\xi)f(x-\xi)d\xi = \sin(t)\sqcap(t)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

NOTA: La señal misteriosa se conoce como una **función de Bessel de orden zero** y es una señal que aparece en un sinnúmero de problemas físicos, como por ejemplo en la modulación de frecuencia (FM) o en los modos de vibración de una membrana circular.

2. (12 pts.) **Sistema discreto**. Considere un sistema discreto causal e inicialmente en reposo, determinado por el siguiente diagrama de bloques:



(a) (2 pts.) Determine la ecuación de diferencias que describe el sistema.

(b) (2 pts.) Determine si el sistema es lineal e invariante.

(c) (2 pts.) Determine la respuesta de frecuencia del sistema.

(d) (3 pts.) Determine la respuesta al impulso del sistema.

(e) (3 pts.) Determine la salida cuando la entrada es $f[n] = 2\cos(\frac{\pi n}{2})$

HINT: Para esta pregunta (la pregunta 2) puede ser útil considerar la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|}, \quad |a| < 1$$

Solución

(a) Observamos que el diagrama está en la forma directa II y corresponde a la ecuación de diferencias:

$$\boxed{g[n] - \frac{1}{2}g[n-1] = f[n] + \frac{1}{2}f[n-1]} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

(b) Es claro que un sistema descrito por ecuaciones de diferencias de coeficientes constantes es LTI $\rightarrow$ **2 pts.** En todo caso se pueden probar estas propiedades a partir de la ecuación de diferencias.

(c) Tomando DTFT a la ecuación, y considerando un período de muestreo $T = 1$:

$$G(u) - \frac{1}{2}e^{-i2\pi u}G(u) = F(u) + \frac{1}{2}e^{-i2\pi u}F(u) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

por lo que la respuesta de frecuencia es

$$\boxed{H(u) = \frac{G(u)}{F(u)} = \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-i2\pi u}}{1 - \frac{1}{2}e^{-i2\pi u}}, \quad |u| \leq \frac{1}{2}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

La pregunta 2 continúa en la página siguiente ...

(d) La respuesta al impulso se podría obtener a partir de la DTFT inversa de la expresión anterior. Primero notamos que

$$H(u) = \underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-i2\pi u}}}_{a[n]} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{e^{-i2\pi u}}{1-\frac{1}{2}e^{-i2\pi u}}}_{b[n]}$$

Vemos que necesitamos calcular solamente $a[n]$ ya que $b[n]$ es simplemente una versión amplificada y desplazada de $a[n]$. Sin embargo, utilizando el HINT notamos que

$$\text{DTFT}\{a^n \sqcap[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty}(ae^{-i2\pi u})^n = \frac{1}{1-ae^{-i2\pi u}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

por lo que la respuesta al impulso es:

$$\boxed{h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sqcap[n] + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sqcap[n-1]} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(e) La salida se podría encontrar vía convolución, o por multiplicación en el dominio de Fourier. Sin embargo, recordando que las exponenciales complejas son autofunciones de los sistemas LTI, y que un coseno es una suma de exponenciales complejas, entonces

$$g[n] = H(\frac{1}{4})e^{i\frac{\pi}{2}n} + H(-\frac{1}{4})e^{-i\frac{\pi}{2}n} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

$$g[n] = \frac{1-i/2}{1+i/2}e^{i\frac{\pi}{2}n} + \frac{1+i/2}{1-i/2}e^{-i\frac{\pi}{2}n} = (\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i)e^{i\frac{\pi}{2}n} + (\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i)e^{-i\frac{\pi}{2}n} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

finalmente,

$$\boxed{g[n] = e^{-i\tan^{-1}(\frac{4}{3})}e^{i\frac{\pi}{2}n} + e^{i\tan^{-1}(\frac{4}{3})}e^{-i\frac{\pi}{2}n} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}n - \tan^{-1}(\frac{4}{3})\right)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

3. (12 pts.) **Muestreo**.

(a) (3 pts.) Considere un sistema muestreador, en base a retención de orden cero, con entrada $f(t)$, salida $g(t)$ y período de muestreo T, dado por

$$g(t) = f(nT), \quad nT \leq t \leq (n+1)T, \ \forall n$$

Determine si este muestreador es lineal, invariante y si tiene o no memoria.

(b) (9 pts.) Considere la señal

$$f(t) = 4\cos(4000\pi t) + 6\cos(6000\pi t) + \sin(14000\pi t)$$

cuya Transformada de Fourier es $F(u)$. Suponga que esta señal se muestrea con una frecuencia de muestreo u_s. Para cada una de las frecuencias de muestreo especificadas más abajo (en kHz) (1) Determine la DTFT de la señal muestreada en términos de $F(u)$. (2) Bosqueje la magnitud de la DTFT. (3) Explique si la señal original puede ser reconstruida a partir de sus muestras.

La pregunta 3 continúa en la página siguiente ...

i. (3 pts.) $u_s = 20$ kHz.

ii. (3 pts.) $u_s = 10$ kHz.

iii. (3 pts.) $u_s = 5$ kHz.

Solución

(a) Las propiedades del sistema muestreador son

i. Linealidad. Primero probamos homogeneidad:

$$af(t) \to af(nT) = ag(t)$$

lo que implica que el sistema es homogéneo. Luego, probamos superposición:

$$f_1(t) + f_2(t) \to f_1(nT) + f_2(nT) = g_1(t) + g_2(t)$$

lo cual también se cumple, por lo que el sistema es lineal → **1 pt.**

ii. Invariancia. Los muestreadores son en general sistemas variantes, ya que escogen una muestra en un lugar específico del tiempo y si la señal de entrada se desfasa el valor de la muestra ya no será la misma. En este caso particular, el sistema es invariante solo a desfases $\tau = T$, por lo tanto, es un sistema variante en el tiempo para $\tau \neq T$ → **1 pt.**

iii. Memoria. El sistema no depende de valores pasados o futuros de la entrada, por lo cual no tiene memoria → **1 pt.**

(b) Primero observamos que el espectro de la señal (su Transformada de Fourier) es

$$F(u) = \begin{cases} 2, & |u| = 2 \text{ kHz} \\ 3, & |u| = 3 \text{ kHz} \\ \frac{i}{2}, & u = -7 \text{ kHz} \\ \frac{-i}{2}, & u = 7 \text{ kHz} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

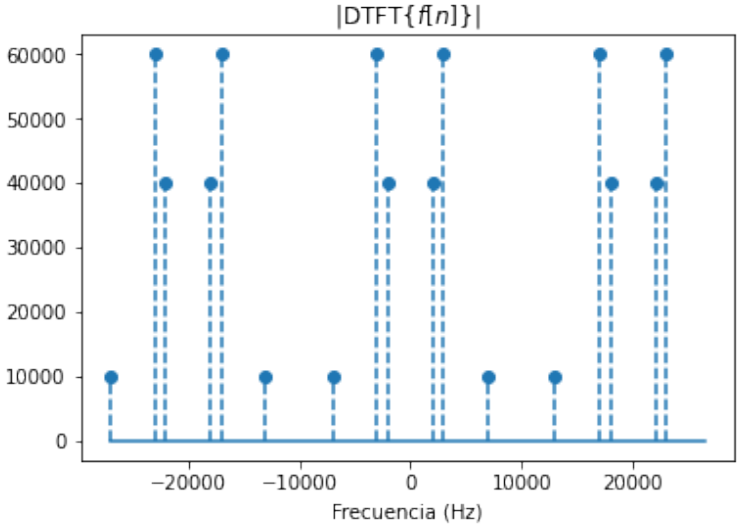
La magnitud de la máxima frecuencia de la señal es 7 kHz.

i. En este caso $u_s = 20$ kHz. La DTFT es, entonces

$$\tilde{F}(u) = F(u)\Big|_{u=\frac{u}{20000}} = 20000 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(u - 20000n) \to \textbf{1 pt.}$$

El gráfico del valor absoluto de la DTFT es:

La pregunta 3 continúa en la página siguiente ...



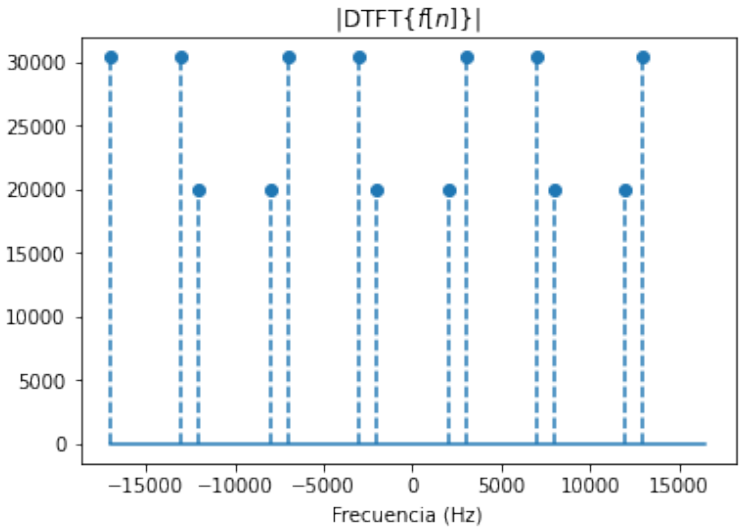
→ **1 pt.**

Dado que $u_s = 20 > 2 \times 7 = 14$ kHz, entonces la señal está sobremuestreada y es totalmente recuperable a partir de sus muestras mediante una interpolación sinc → **1 pt.** .

ii. En este caso $u_s = 10$ kHz. La DTFT es, entonces

$$\tilde{F}(u) = F(u)\Big|_{u=\frac{u}{10000}} = 10000 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(u - 10000n) \rightarrow \textbf{1 pt.}$$

El gráfico del valor absoluto de la DTFT es:



→ **1 pt.**

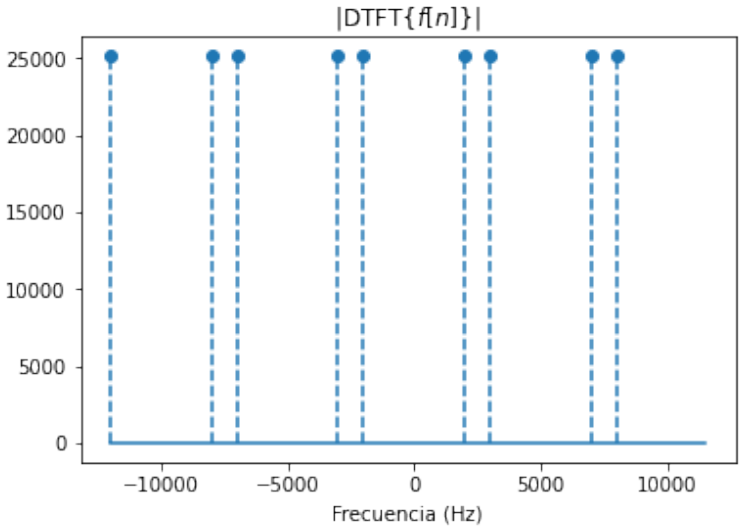
Dado que $u_s = 10 < 2 \times 7 = 14$ kHz, entonces la señal está submuestreada y no es recuperable a partir de sus muestras → **1 pt.** .

La pregunta 3 continúa en la página siguiente ...

iii. En este caso $u_s = 5$ kHz. La DTFT es, entonces

$$\tilde{F}(u) = F(u)\Big|_{u=\frac{u}{5000}} = 5000 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(u - 5000n) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

El gráfico del valor absoluto de la DTFT es:



$\rightarrow$ **1 pt.**

Dado que $u_s = 5 < 2 \times 7 = 14$ kHz, entonces la señal está submuestreada y no es recuperable a partir de sus muestras $\rightarrow$ **1 pt.** .

4. (12 pts.) **Ventanas, Transformadas y Distribuciones**.

(a) (5 pts.) **Apodización rectangular deslizante**. Suponga un sistema que multiplica una señal de largo arbitrario pero mucho mayor a la cantidad N, por una ventana rectangular de largo N. Una vez obtenida la secuencia apodizada, el sistema calcula su DFT de largo N. Luego, la ventana es desplazada dos muestras hacia la derecha, adquiriendo dos muestras nuevas, denotadas por a y b, y el proceso se repite indefinidamente.

Sea $f[n]$ una de estas secuencias apodizadas tal que:

$$f[n] = (\underline{f_0}, f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{N-1}) \longrightarrow F[k]$$

y $g[n]$ la secuencia inmediatamente siguiente, es decir:

$$g[n] = (\underline{f_2}, f_3, \ldots, f_{N-1}, a, b) \longrightarrow G[k]$$

Determine una expresión para $G[k]$ en términos de las muestras de $f[n]$, de $F[k]$ y de a y b.

(b) (4 pts.) **Transformada de frecuencia discreta inversa de Chebyshev**. Se define la Transformada de frecuencia discreta inversa de Chevyshev como:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F[k] T_k(t) \quad |t| \leq 1$$

donde $T_k(t)$ es un polinomio de Chebyshev de orden k y$F[k]$ son los coeficientes de la Transformada directa. Estos polinomios conforman una base ortogonal para esta transformada y se definen de forma recursiva, de la siguiente forma:

$$T_0(t) = 1$$

$$T_1(t) = t$$

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t)$$

Encuentre los coeficientes de la señal $f(t) = t^2 - 3t - \frac{1}{2}$, en el intervalo $|t| \leq 1$

(c) (3 pts.) **Transformada de Laplace del shah causal**. Considere la distribución "shah causal", definida como

$$\text{Ш}^+ = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{\delta_n}$$

Abusando de la notación, podríamos escribir

$$\text{Ш}^+ = \text{Ш}\llcorner$$

Determine la Transformada de Laplace de la distribución Ш^+. No se preocupe de calcular la ROC. HINT: Use el HINT de la pregunta 2.

Solución

(a) Consideremos las secuencias

$$x[n] = (\underline{f_0}, f_1, 0, 0, \ldots, 0) \longrightarrow \frac{1}{N}(f_0 + e^{-i2\pi k/N} f_1) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

$$y[n] = (\underline{a}, b, 0, 0, \ldots, 0) \longrightarrow \frac{1}{N}(a + e^{-i2\pi k/N} b) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Luego podemos formar la secuencia $w[n] = f[n] - x[n] + y[n]$ tal que

$$w[n] = (\underline{a}, b, f_2, f_3, \ldots, f_{N-1}) \longrightarrow F[k] - \frac{1}{N}(f_0 + e^{-i2\pi k/N} f_1) + \frac{1}{N}(a + e^{-i2\pi k/N} b) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Vemos que la secuencia pedida es una rotación de dos muestras hacia la izquierda de $w[n]$, es decir

$$g[n] = (\underline{f_2}, f_3, \ldots, f_{N-1}, a, b) \longrightarrow e^{i4\pi k/N} W[k] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Finalmente,

$$\boxed{G[k] = e^{i4\pi k/N} \left(F[k] + \frac{1}{N}(a - f_0) + \frac{1}{N} e^{-i2\pi k/N} (b - f_1) \right)} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

La pregunta 4 continúa en la página siguiente ...

(b) Primero observamos que la base de Chebyshev para $n = 2$ es:

$$T_2(t) = 2tT_1(t) - T_0(t) = 2t^2 - 1 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Mediante simple inspección vemos que la señal $f(t)$ es una combinación lineal de dos bases de Chebyshev:

$$t^2 - 3t - \frac{1}{2} = -3t + (t^2 - \frac{1}{2}) = -3T_1(t) + \frac{1}{2}T_2(t) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

Entonces, como se trata de bases ortogonales, los coeficientes son simplemente

$$\boxed{F[1] = -3, F[2] = \frac{1}{2}, F[k] = 0 \ \ \forall k \neq 1, 2} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$

(c) Dada la linealidad de la Transformada de Laplace tenemos

$$\mathcal{L}\{\perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp^+\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\{\boldsymbol{\delta_n}\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ns} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-s})^n \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Usando el HINT de la pregunta 2, es trivial ver que:

$$\boxed{\mathcal{L}\{\perp\!\!\!\perp\!\!\!\perp^+\} = \frac{1}{1 - e^{-s}}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pt.}}$$