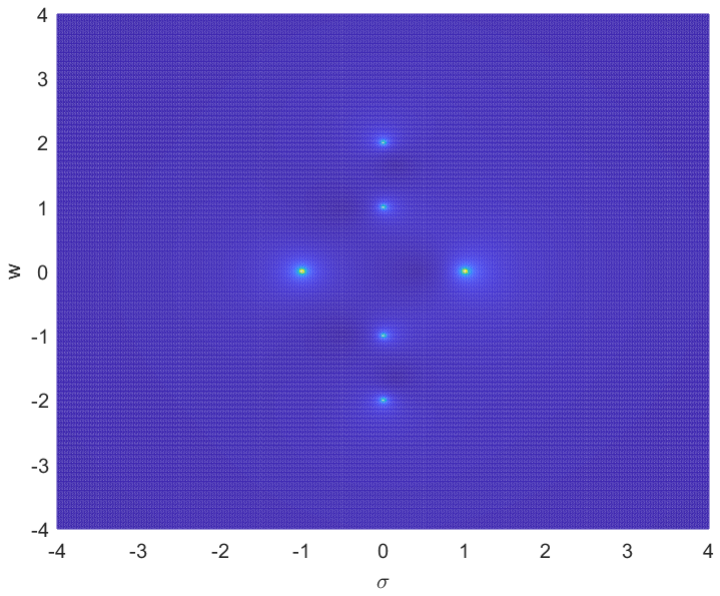
Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

Control 5

30 de Septiembre 2022

La siguiente imagen representa a la transformada de Laplace de una función de interés:



Determine $f(t)$, que es la transformada inversa del contenido del gráfico considerando que la región de convergencia es $0 < Re\{s\} < 1$. Notar que el eje vertical representa frecuencia angular ($w = 2\pi u$).

Es importante reconocer que existen seis polos en $\mathcal{L}\{f(t)\}$, dos de ellos ubicados en el eje horizontal donde $w = 0$ y cuatro en el eje vertical con $\sigma = 0$. Así, buscamos una expresión algebraica que contenga los mismos polos con la variable $s = \sigma + w \cdot i$.

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{s^2+1}$$
$$\mathcal{L}_2 = \frac{2}{s^2+4}$$
$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{s+1}$$
$$\mathcal{L}_4 = \frac{1}{s-1}$$

De esta manera, $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ hacen aparecer los polos en el eje vertical y $\mathcal{L}_3$ más $\mathcal{L}_4$ los del eje horizontal. Ahora, todas las expresiones forman parte de pares de Laplace conocidos por lo que el cálculo de cada inversa es bastante directo. Lo único que falta es atender al requisito de la región de convergencia. Para esto es necesario saber que toda función derecha tiene una ROC de la forma $Re\{s\} > \sigma_o$ y toda función izquierda una de la forma $Re\{s\} < \sigma_o$, donde σ_o se encuentra determinado por los polos de la señal. Además, la ROC de una suma de transformadas será la intersección de las ROC de cada una. Con todo esto es que la delimitación del enunciado se traduce en que las regiones de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ tengan que ser $Re\{s\} > 0$, la de $\mathcal{L}_3$ $Re\{s\} > -1$ y la de $\mathcal{L}_4$ $Re\{s\} < 1$.
Finalmente:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}_1\} = sin(t)u(t)$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}_2\} = sin(2t)u(t)$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}_3\} = e^{-t}u(t)$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}_4\} = -e^{t}u(-t)$$

con $f(t) = sin(t)u(t) + sin(2t)u(t) + e^{-t}u(t) - e^{t}u(-t)$.