Prueba 1 Solución

1. *Operaciones parientes.*

   (a) Las dos diferencias entre estas operaciones son el signo de uno de los ejes y la conjugación de una de las funciones, por lo que usando la definición de la convolución tenemos

$$\begin{aligned} f^*(-x) * g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(-t)g(x-t)\,dt \\ &= -\int_{\infty}^{-\infty} f^*(t)g(x+t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)g(t+x)\,dt \\ &= f(x) \star g(x) \end{aligned}$$

   (b) Una de las funciones debe tener simetría Hermitiana, $f(x) = f^*(-x)$. Puede ser cualquiera de las dos porque la convolución es conmutativa.

2. *Sistema curioso.*

   (a) Usamos el impulso como entrada. Dado que el sistema no es invariante, la respuesta al impulso depende de la posición del impulso, x_o. Si $f(x) = \delta(x - x_o)$ la salida del sistema será

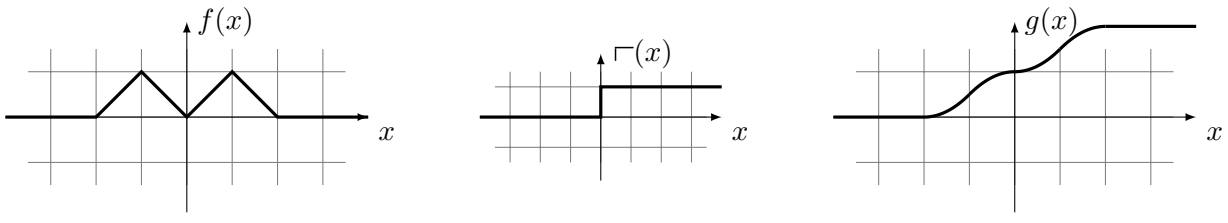
$$\begin{aligned} h(x, x_o) &= x\delta(-x/2 - x_o) && \text{(solo } x \text{ es transformado en } -x/2) \\ &= x\delta(x/2 + x_o) && \text{(el impulso es simétrico)} \\ &= -2x_o\delta(x/2 + x_o) && \text{(el impulso solo es distinto de cero en } x = -2x_o) \\ &= -4x_o\delta(x + 2x_o) && \text{(usando el impulso de una función)} \end{aligned}$$

   (b) Si $f(x) = \sqcap(x)$ tenemos $g(x) = x \sqcap (x/2)$ de donde

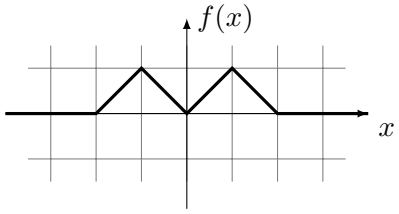
$$p(x) = x\left(-\frac{1}{2}x \sqcap \left(\frac{x}{4}\right)\right) = -\frac{1}{2}x^2 \sqcap (x/4)$$

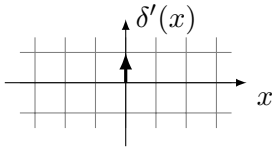
3. Por inspección se puede comprobar que para (a), $g(x)$ es la integral de $f(x)$, por lo que se está convolucionando con $\sqcap(x)$. Para (b) tenemos que $g(x)$ es la derivada de $f(x)$, por lo que $h(x)$ es la derivada del impulso. Y finalmente, para (c) tenemos que $g(x)$ es la diferencia de $f(x)$ con $f(x-1)$.

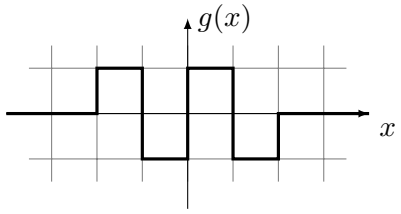
(a)



(b)







(c)

