Prueba 2 SOLUCIÓN

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Escriba un problema en cada hoja. Debe colocar su nombre en todas las hojas. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. [6 ptos] Alicia tiene un reloj muy preciso que da la hora exacta. Benito tiene uno muy malo que se atrasa. Alicia y Benito sincronizaron sus relojes a las 10:00. Dos horas después el reloj de Benito marcaba las 11:50. Un poco más tarde, Benito midió una señal del tiempo (usando su reloj en unidades de horas) y le tomó transformada de Fourier. Obtuvo

$$F(u) = e^{-i30\pi u}\,\mathrm{sinc}^{\,2}(2u)$$

Encuentre la señal en función del tiempo correcto (reloj de Alicia) e indique a qué hora está centrada.

Resultado: Sea t la hora según Alicia y q la hora según Benito. Para transformar uno en otro tenemos

$$q = at + b$$

Y para encontrar las constantes a y b usamos los puntos conocidos

$$\begin{aligned} 10:00 &= 10:00\,a + b \\ 11:50 &= 12:00\,a + b \end{aligned}$$

Que en unidades más razonables es

$$\begin{aligned} 10 &= 10a + b \\ 11\,5/6 &= 12a + b \end{aligned}$$

de donde $a = 11/12$ y $b = 10/12$.

Según Benito la señal es

$$e^{-i2\pi 15u}\,\mathrm{sinc}^{\,2}(2u) \longleftarrow f_B(q) = \frac{1}{2} \wedge (\frac{q-15}{2})$$

Para transformala al tiempo de Alicia usamos

$$\begin{aligned} f(t) = f_B(at+b) &= \frac{1}{2} \wedge (\frac{at+b-15}{2}) \\ &= \frac{1}{2} \wedge (\frac{\frac{11}{12}t + \frac{10}{12} - 15}{2}) \\ &= \frac{1}{2} \wedge (\frac{t + \frac{10}{11} - 15 \times \frac{12}{11}}{2 \times \frac{12}{11}}) \\ &= \frac{1}{2} \wedge (\frac{t - \frac{170}{11}}{\frac{24}{11}}) \end{aligned}$$

Y estará centrada en $170/11 \approx 15:30$.

2. [6 ptos] ¿Cuánto vale
$$\int_{-\infty}^{\infty} (\ln(x) - \ln(-x))\, dx?$$

Resultado: Dado que el integrando es impar, la integral vale cero.

3. [6 ptos] Se define el valor esperado de una función como
$$\mathrm{E}f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)\, dx$$
donde $p(x)$ es la pdf (densidad de probabilidades) de x. Si $p(x) \longrightarrow P(u)$, encuentre las siguientes esperanzas en función de $P(u)$ y sus derivadas.

   (a) $\mathrm{E}x$, la media.

   (b) $\mathrm{E}x^2$

   (c) $\mathrm{E}(x - \mathrm{E}x)^2$, la varianza.

Resultado: Para calcular estas integrales usaremos las siguientes propiedades de la transformada de Fourier:
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = F(0)$$
$$xf(x) \longrightarrow -\frac{1}{i2\pi}F'(u)$$
$$x^2 f(x) \longrightarrow -\frac{1}{4\pi^2}F''(u)$$

(a)
$$\mathrm{E}x = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\, dx = -\frac{1}{i2\pi}P'(0)$$

(b)
$$\mathrm{E}x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\, dx = -\frac{1}{4\pi^2}P''(0)$$

(c)
$$\mathrm{E}(x-\mathrm{E}x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mathrm{E}x)^2 p(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\, dx - 2\mathrm{E}x \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\, dx + (\mathrm{E}x)^2 \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, dx$$
$$= \mathrm{E}x^2 - 2(\mathrm{E}x)^2 + (\mathrm{E}x)^2 = \mathrm{E}x^2 - (\mathrm{E}x)^2$$
$$= -\frac{1}{4\pi^2}P''(0) - (-\frac{1}{i2\pi}P'(0))^2$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}(P'(0)^2 - P''(0))$$

4. [6 ptos] Encuentre la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}\{F(x)\}\, dx$$

si se sabe que $F(u)$ es la transformada de Fourier de $f(x) = g(x-a)$ y que $g(x)$ es imaginaria y par.

Resultado: Como $g(x)$ es imaginaria y par, entonces $G(u)$ es imaginaria y par. Para hacerlo explícito escribamos $G(u) = i|G(u)|$. Además

$$F(u) = e^{-i2\pi au}G(u) = ie^{-i2\pi au}|G(u)|$$

$$F(u) = i\cos(2\pi au)|G(u)| + \text{sen}\,(2\pi au)|G(u)|$$

$$\text{Re}\{F(u)\} = \text{sen}\,(2\pi au)|G(u)|$$

Esta función es impar (producto de una impar por una par), por lo que su integral será cero.

5. [6 ptos] Sea $f(x)$ una función periódica y par, definida por su expansión en series de Fourier cuyos coeficientes son a_k y b_k (todos los b_k son cero por ser una función par). Encuentre la expansión de Taylor de $f(x)$ en torno a $x_o = 0$ en función de los coeficientes de Fourier. *Ver al reverso para ayuda memoria con definción de series.*

Resultado: La función es

$$f(x) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_o x$$

Para calcular la serie de Taylor, calculamos primero las derivadas

$$f^{(1)}(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n (n\omega_o)^1 \,\text{sen}\, n\omega_o x$$

$$f^{(2)}(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n (n\omega_o)^2 \cos n\omega_o x$$

$$f^{(3)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (n\omega_o)^3 \,\text{sen}\, n\omega_o x$$

$$f^{(4)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (n\omega_o)^4 \cos n\omega_o x$$

Que generalizando, y evaluando en $x_o = 0$ es

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k/2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (n\omega_o)^k, \quad \text{para } k \text{ par}$$

y

$$f^{(k)}(0) = 0, \quad \text{para } k \text{ impar}$$

La serie será

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$$

$$f(x) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{k \text{ par}}^{\infty} \frac{x^k}{k!}(-1)^{k/2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (n\omega_o)^k$$

6. [6 ptos] *Continuación de la pregunta anterior.* Para probar qué tan buena son las expansiones de Taylor y de Fourier, encuéntrelas para el caso particular de los siguientes coeficientes de Fourier

$$a_0 = 0, \quad a_k = 1 \text{ para } k \leq 4, \quad a_k = 0 \text{ para } k > 4, \quad \text{y} \quad b_k = 0 \quad \text{para todo } k.$$

con $\omega_o = \pi/8$ y $x_o = 0$. Llamemos $f_N(x)$ a la serie de Fourier de orden N y $t_N(x)$ a la serie de Taylor de orden N.

   (a) Evalúe el error cometido por la serie de Fourier en $x = 2$, es decir, $f_N(2) - f(2)$ para $N = 1$, $N = 2$, $N = 3$ y $N = 4$.

   (b) Evalúe el error cometido por la serie de Taylor en $x = 2$, es decir, $t_N(2) - f(2)$ para $N = 1$ y $N = 2$.

Resultado: En este caso la función es

$$f(x) = \sum_{n=1}^{4} \cos n\pi/8\, x$$

   (a) Las expansiones de Fourier de orden N son

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{1} \cos n\pi/8\, x, \quad f_1(2) = \cos \pi/8 \times 2 = \cos \pi/4 = \sqrt{2}/2$$

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{2} \cos n\pi/8\, x, \quad f_2(2) = \sqrt{2}/2 + \cos \pi/8 \times 4 = \sqrt{2}/2 + \cos \pi/2 = \sqrt{2}/2$$

$$f_3(x) = \sum_{n=1}^{3} \cos n\pi/8\, x, \quad f_3(2) = \sqrt{2}/2 + \cos \pi/8 \times 6 = \sqrt{2}/2 + \cos 3\pi/4 = \sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/2 = 0$$

$$f_4(x) = \sum_{n=1}^{4} \cos n\pi/8\, x, \quad f_4(2) = 0 + \cos \pi/8 \times 8 = \cos \pi = -1$$

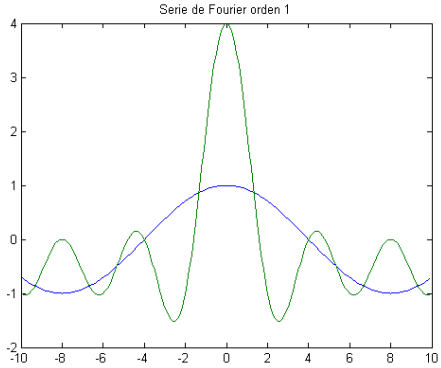
   El valor exacto de la función es $f(2) = -1$ que coincide con $f_4(2)$ porque la función solo tiene cuatro coeficientes. Los errores serán

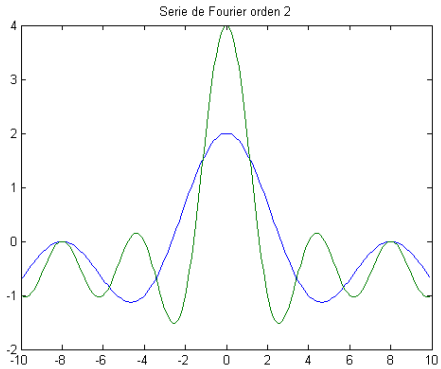
$$f_1(2) - f(2) = \sqrt{2}/2 + 1 \approx 1.7$$

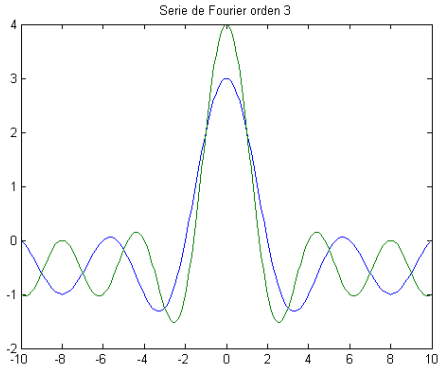
$$f_2(2) - f(2) = \sqrt{2}/2 + 1 \approx 1.7$$

$$f_3(2) - f(2) = 0 + 1 = 1$$
$$f_4(2) - f(2) = -1 + 1 = 0$$

Como un extra, en los gráficos siguientes se muestra cómo la serie de Fourier se va ajustando cada vez más a la función original. Que al final se ajuste tan bien no tiene mucha gracia, porque la función se definió así.







(b) Las expansiones de Taylor de orden N son

$$f(x) = 4 + \sum_{k \text{ par}}^{N} \frac{x^k}{k!}(-1)^{k/2} \sum_{n=1}^{4} (n\pi/8)^k$$

es decir,

$$t_1(2) = 4 + \sum_{k \text{ par}}^{1} \frac{2^k}{k!}(-1)^{k/2} \sum_{n=1}^{4}(n\pi/8)^k = 4$$

$$t_2(2) = 4 + \sum_{k \text{ par}}^{2} \frac{2^k}{k!}(-1)^{k/2} \sum_{n=1}^{4}(n\pi/8)^k = 4 + \frac{2^2}{2!}(-1)^{2/2} \sum_{n=1}^{4}(n\pi/8)^2 = 4 - 2\sum_{n=1}^{4}(n\pi/8)^2$$

con

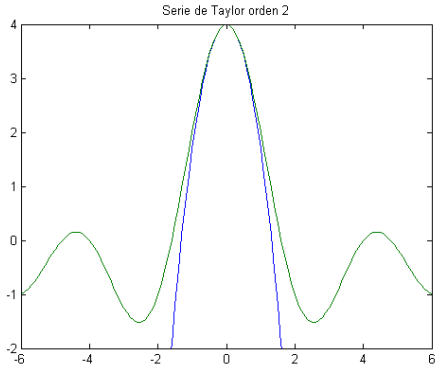
$$\sum_{n=1}^{4}(n\pi/8)^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)(\pi/8)^2 = 15\pi^2/32$$

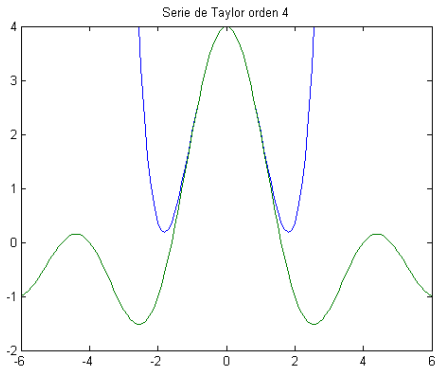
Los errores serán

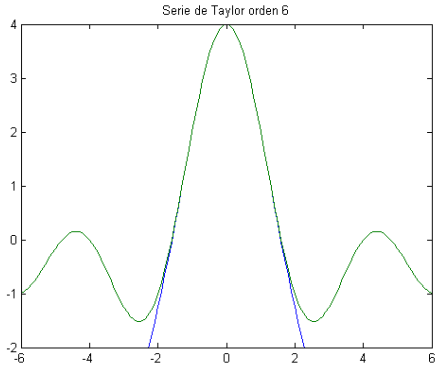
$$t_1(2) - f(2) = 4 + 1 = 5$$

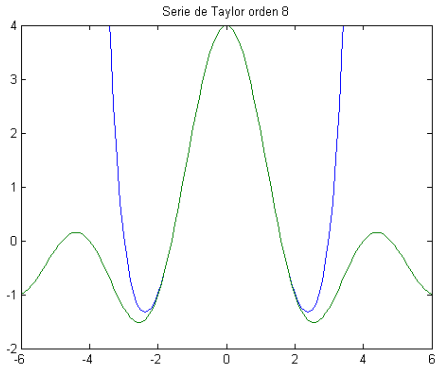
$$t_2(2) - f(2) = 4 - 2 \times 15\pi^2/32 + 1 \approx -4.3$$

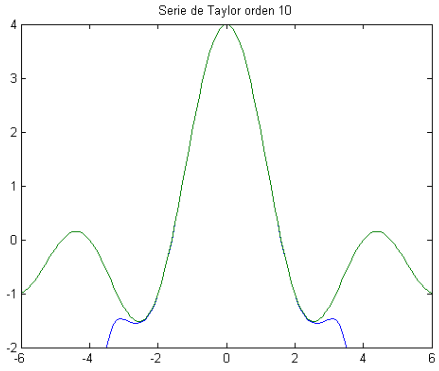
En los gráficos siguientes se muestra cómo la serie de Taylor se va ajustando cada vez más a la función original. Las expansiones de orden impar son iguales a la par inmediatamente anterior. ¡Mejor ni graficar para x mayores!











Series

Expansión en series de Fourier:

$$f(x) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_o x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\omega_o x$$

Expansión en series de Taylor:

$$f(x) = f(x_o) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(x - x_o)^n f^{(n)}(x_o)$$

Se dice que estas series son de orden N, si las sumatorias se realizan solo hasta N en vez de ∞.