# Prueba 2

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Escriba un problema en cada hoja. Debe colocar su nombre en todas las hojas. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. [6 ptos]

   (a) [3 ptos] ¿Cuál es la transforma de Fourier de $e^{ix}$?

   (b) [3 ptos] Encuentre la transforma de Fourier de la distribución normal de probabilidades:

   $$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

   **Resultado:**

   (a) Primero disculpas por el *typo*. Quizás debí haber escrito *transformá*. Esta transformada se puede obtener trivialmente porque corresponde a una de las bases de Fourier inversa

   $$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u - 1/2\pi) e^{i2\pi ux}\, du = e^{ix}$$

   Es decir $F(u) = \delta(u - 1/2\pi)$.

   (b) Comenzando con el par conocido para Gauss, vamos a aplicar las propiedades

   $$\begin{aligned}
   e^{-\pi x^2} &\longrightarrow e^{-\pi u^2} \\
   e^{-\pi(\frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma})^2} &\longrightarrow \sqrt{2\pi}\sigma e^{-\pi(\sqrt{2\pi}\sigma u)^2} \\
   e^{-(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma})^2} &\longrightarrow \sqrt{2\pi}\sigma e^{-i2\pi u\mu} e^{-\pi(\sqrt{2\pi}\sigma u)^2} \\
   \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma})^2} &\longrightarrow e^{-i2\pi u\mu} e^{-\pi(\sqrt{2\pi}\sigma u)^2} = e^{-i2\pi u\mu} e^{-2\pi^2\sigma^2 u^2}
   \end{aligned}$$

2. [9 ptos] Se define la transformada de Hilbert como

   $$\hat{f}(p) = \mathcal{H}\{f(x)\}(p) = \text{p.v.}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-p}\, dx$$

   donde p.v. se refiere al valor principal de Cauchy (no es relevante para este problema, lo coloco solo para ser matemáticamente riguroso, y excluir la vecindad donde la función diverge). Encuentre las siguientes propiedades

   (a) [3 ptos] Desplazamiento, $\mathcal{H}\{f(x-a)\}$

   (b) [3 ptos] Escalamiento, $\mathcal{H}\{f(ax)\}$ con $a \neq 0$.

   (c) [3 ptos] Dualidad, $\mathcal{H}\{\mathcal{H}\{f(x)\}\}$

**Resultado:** Las propiedades las podemos buscar directamente de la definición, o también podemos usar el hecho que la definición es equivalente a

$$\hat{f}(p) = f(p) * \frac{1}{\pi p}$$

(a) De la interpretación como convolución, trivialmente se ve que desplazar la función es equivalente a desplazar la transformada de Hilbert,

$$\hat{f}(p-a) = f(p-a) * \frac{1}{\pi p}$$

o

$$\mathcal{H}\{f(x-a)\} = \hat{f}(p-a)$$

Directamente de la definición, también se ve que haciendo el cambio de variable $x = \xi - a$ se tiene

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi-a)}{\xi-(p+a)}\, d\xi = \hat{f}(p-a)$$

(b) De la interpretación como convolución, trivialmente se ve que escalar la función es equivalente a escalar la transformada de Hilbert,

$$\hat{f}(ap) = f(ap) * \frac{1}{\pi p}$$

Esto es cierto para $a > 0$, ya que si $a < 0$, la función se invierte y cambia el signo de la convolución (es equivalente a invertir $1/p$ donde claramente se aprecia el cambio de signo). Es decir,

$$\mathcal{H}\{f(ax)\} = \text{sgn}(a)\hat{f}(ap)$$

Directamente de la definición, y haciendo el cambio de variable $x = a\xi$, tenemos

$$\frac{\text{sgn}(a)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(a\xi)}{a\xi - p}\, a d\xi = \frac{\text{sgn}(a)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(a\xi)}{\xi - p/a}\, d\xi = \text{sgn}(a)\hat{f}(ap)$$

(c) Una manera de encontrar la dualidad es en el dominio de Fourier, ya que la transformada de Hilbert está definida como una convolución

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(x) * \frac{1}{\pi x} * \frac{1}{\pi x}$$

$$\hat{\hat{F}}(u) = F(u)(\mathcal{F}\{\frac{1}{\pi x}\})^2 = (-i\text{sgn}(u))^2 F(u) = -F(u)$$

Es decir,

$$\mathcal{H}\{\mathcal{H}\{f(x)\}\} = -f(x)$$

3. [8 ptos] Se tiene una señal de audio de 20 s de duración. Durante los primeros 10 s corresponde a un tono perfecto de 100 Hz y durante los últimos 10 s, a un tono perfecto de 200 Hz

(a) [2 ptos] Encuentre la transformada de Fourier de la señal.

(b) [2 ptos] Grafique, indicando los puntos más importantes, la transformada de la señal en el rango $99.9 \leq u \leq 100.1$ Hz.

(c) [2 ptos] Encuentre la transformada de Fourier de la señal invertida, con el tono de 200 Hz primero y el de 100 Hz después.

(d) [2 ptos] Grafique, indicando los puntos más importantes, la transformada de la señal invertida en el rango $99.9 \leq u \leq 100.1$ Hz.

**Resultado:**

(a) Vamos a suponer que la señal está centrada en cero (esto es arbitrario), con lo que tenemos

$$f(x) = \sqcap(\frac{x+5}{10})\cos(2\pi 100x) + \sqcap(\frac{x-5}{10})\cos(2\pi 200x)$$

Para encontrar las transformadas usaremos

$$\begin{aligned}
\sqcap(\frac{x+5}{10}) &\longrightarrow 10e^{i2\pi 5u}\,\mathrm{sinc}\,(10u) \\
\sqcap(\frac{x-5}{10}) &\longrightarrow 10e^{-i2\pi 5u}\,\mathrm{sinc}\,(10u) \\
\cos(2\pi 100x) &\longrightarrow \frac{1}{200} \uparrow\uparrow (\frac{u}{200}) \\
\cos(2\pi 200x) &\longrightarrow \frac{1}{400} \uparrow\uparrow (\frac{u}{400})
\end{aligned}$$

La transformada de Fourier será

$$F(u) = 10e^{i2\pi 5u}\,\mathrm{sinc}\,(10u) * \frac{1}{200} \uparrow\uparrow (\frac{u}{200}) + 10e^{-i2\pi 5u}\,\mathrm{sinc}\,(10u) * \frac{1}{400} \uparrow\uparrow (\frac{u}{400})$$

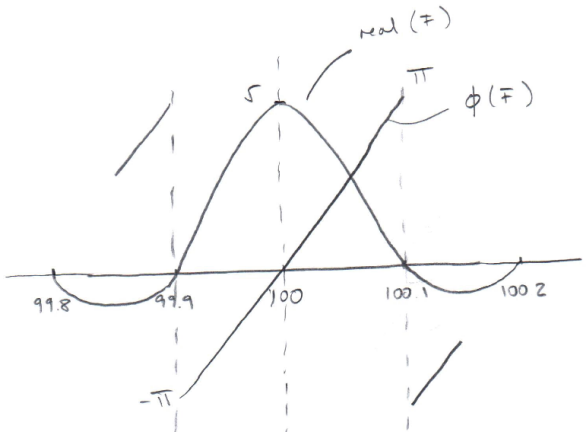
La convolución equivale a replicar el sinc en cada una de las posiciones de los impulsos. Nótese que la magnitud de los impulsos es 1/2.

$$\begin{aligned}
F(u) &= 5e^{i2\pi 5(u-100)}\,\mathrm{sinc}\,(10(u-100)) + 5e^{-i2\pi 5(u-200)}\,\mathrm{sinc}\,(10(u-200)) \\
&\quad +5e^{i2\pi 5(u+100)}\,\mathrm{sinc}\,(10(u+100)) + 5e^{-i2\pi 5(u+200)}\,\mathrm{sinc}\,(10(u+200)) \\
&= 5e^{i10\pi u}\,\mathrm{sinc}\,(10(u-100)) + 5e^{-i10\pi u}\,\mathrm{sinc}\,(10(u-200)) \\
&\quad +5e^{i10\pi u}\,\mathrm{sinc}\,(10(u+100)) + 5e^{-i10\pi u}\,\mathrm{sinc}\,(10(u+200))
\end{aligned}$$

(b) La única parte relevante para el gráfico es

$$F(u) = 5e^{i10\pi u}\,\mathrm{sinc}\,(10(u-100))$$

que es un sinc centrado en 100 de ancho 0.2 (los primeros cruces por cero estarán en 99.9 y 100.1) multiplicado por una fase lineal. La fase es $\pi$ en 100.1 y $-\pi$ en 99.9.




(c) La transformada de Fourier será

$$F(u) = 10e^{i2\pi 5u}\,\mathrm{sinc}\,(10u) * \frac{1}{400} \uparrow\uparrow (\frac{u}{400}) + 10e^{-i2\pi 5u}\,\mathrm{sinc}\,(10u) * \frac{1}{200} \uparrow\uparrow (\frac{u}{200})$$

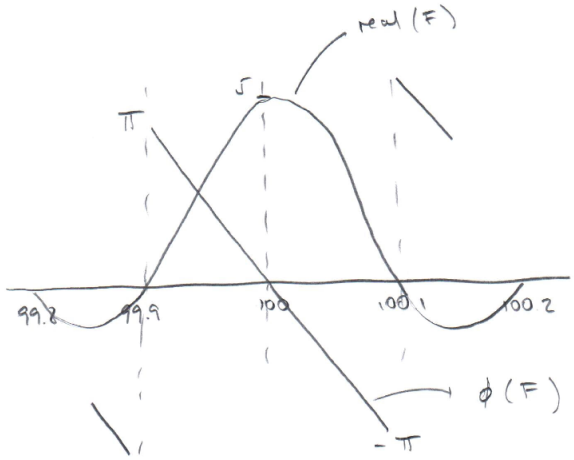
Es decir,

$$\begin{aligned} F(u) &= 5e^{i10\pi u}\,\mathrm{sinc}\,(10(u-200)) + 5e^{-i10\pi u}\,\mathrm{sinc}\,(10(u-100)) \\ &\quad +5e^{i10\pi u}\,\mathrm{sinc}\,(10(u+200)) + 5e^{-i10\pi u}\,\mathrm{sinc}\,(10(u+100)) \end{aligned}$$

(d) Nuevamente, la única parte relevante para el gráfico es

$$F(u) = 5e^{-i10\pi u}\,\mathrm{sinc}\,(10(u-100))$$

que es igual al gráfico anterior, excepto porque la fase tiene signo negativo.




4. [6 ptos] Se tiene un sistema lineal de entreda $f(t)$ y salida $g(t)$ representado por la siguiente ecuación de variables de estado

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'(t) &= \mathbf{A}\mathbf{v}(t) + \mathbf{b}f(t) \\ g(t) &= \mathbf{c}\mathbf{v}(t) \end{aligned}$$

Encuentre $G(u)$, la transformada de Fourier de $g(t)$, en función de $F(u)$, la transformada de Fourier de $f(t)$, y las constantes $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$, y $\mathbf{c}$.

**Resultado:** Se pide

$$\begin{aligned} G(u) &= \mathcal{F}\{g(t)\} \\ &= \mathcal{F}\{\mathbf{c}\mathbf{v}(t)\} \\ &= \mathbf{c}\mathcal{F}\{\mathbf{v}(t)\} \\ &= \mathbf{c}\mathbf{V}(u) \end{aligned}$$

donde $\mathbf{V}(u)$ es el vector con las transformadas de Fourier de cada uno de los elementos del vector $\mathbf{v}(t)$. Para encontrar $\mathbf{V}(u)$, tomamos la FT de la ecuación de estados:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\mathbf{v}'(t)\} &= \mathcal{F}\{\mathbf{A}\mathbf{v}(t) + \mathbf{b}f(t)\} \\ i2\pi u\mathbf{V}(u) &= \mathbf{A}\mathbf{V}(u) + \mathbf{b}F(u) \\ (i2\pi u\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{V}(u) &= \mathbf{b}F(u) \\ \mathbf{V}(u) &= (i2\pi u\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}F(u) \end{aligned}$$

y, finalmente,

$$G(u) = \mathbf{c}(i2\pi u\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}F(u)$$