Examen

◁ *Miércoles 09 de noviembre, 2009* ⊗ *09:00-11:00* ▷

1. Para la señal de la figura 1:
   (a) Escriba el término continuo y los primeros tres términos sinusoidales de la serie de Fourier.
   (b) Encuentre la energía de la señal en un periodo (potencia promedio) y determine que porcentaje de la energía está contenido en los términos de (a).

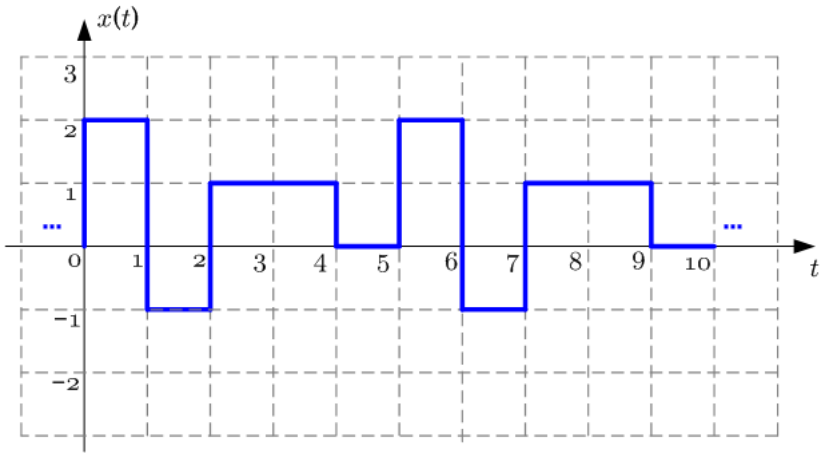


Figura 1: Señal del problema 1.

2. Una señal tiene transformada de Fourier:

$$X(\omega) = \begin{cases} 2e^{j\frac{pi}{2}\frac{\omega}{|\omega|}}, & 1 < |\omega| < 3 \\ 0, & \text{resto del espectro} \end{cases}$$

La señal $X(\omega)$ entra a un filtro ideal pasabanda de característica $H(\omega) = 1e^{-j(\omega-\omega_c)\frac{2\pi}{3}}$, $\frac{1}{2} < |\omega| < \frac{3}{2}$, donde ω_c es la frecuencia central del filtro.

   (a) Dibuje las características del filtro. Encuentre su respuesta al impulso.
   (b) Dibuje el espectro de $x(t)$ y de la señal de salida del filtro.
   (c) Encuentre el contenido de energía de la señal $x(t)$ y de la salida del filtro.

3. (a) Explique brevemente la relación entre la transformada de Laplace y la transformada $\mathcal{Z}$.
   (b) Obtenga la transformada $\mathcal{Z}$ de las siguientes funciones discretas:
      i. La triangular discreta $x_k = \wedge(T_s k), k \in \mathbb{Z}$, correspondiente a la discretización con periodo de muestreo $T_s = 0.25$ de la senñal triangular $\wedge(t), t \in \mathbb{R}$.
      ii. El escalón unitario $u_k = 1, \forall\, k \geq 0, u_k = 0, \forall\, k < 0, k \in \mathbb{Z}$.
      iii. La exponencial $x_k = e^{aT_s k}, \forall\, k \geq 0, x_k = 0, \forall\, k < 0, k \in \mathbb{Z}, T_s > 0, a \in \mathbb{R}$.
      iv. La rampa unitaria $x_k = k, \forall\, k \geq 0, x_k = 0, \forall\, k < 0, k \in \mathbb{Z}$.
   (c) Encuentre la señal cuya transformada $\mathcal{Z}$ está dada por

$$Y(z) = \frac{1}{z-1}$$

4. Para el sistema discreto definido por la ecuación de diferencia en el estado:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= A\mathbf{x}_k + Bu_k, \\ y_k &= C\mathbf{x}_k + Du_k \end{aligned}$$

con condición inicial $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$, y $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}$, $y_k \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$.

(a) Demuestre que la función de transferencia está dada por:

$$F(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

(b) Demuestre que la solución del estado está dada por:

$$\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-1-i}Bu_i$$

(c) Si $\mathbf{x}_k = [x_1(k)\ x_2(k)]^T$ y

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

i. Obtenga la función de transferencia discreta.
ii. Obtenga la ecuación de diferencias.
iii. Obtenga la matriz de transición de estado.
iv. Obtenga la respuesta del sistema cuando $\mathbf{x}_0 = [0\ 0]^T$ y $u_k = \delta(k)$ el impulso unitario.

NOMBRE:

1. Solución Pregunta 1

NOMBRE:

2. Solución Pregunta 2

NOMBRE:

3. Solución Pregunta 3

NOMBRE:

4. Solución Pregunta 4

NOMBRE:

1. Solución Pregunta 1

a) 3 ptos.

$$a_n = \int_0^T x(t)\ \sin(n\omega_0 t)\ dt$$

$$b_n = \int_0^T x(t)\ \cos(n\omega_0 t)\ dt$$

$T = 5$ ✓ $\qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{5}$ ✓

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(\omega_0 n t + \phi_n)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\phi_n = \text{atan}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$$

$$a_n = \int_0^1 2\sin(n\omega_0 t)\ dt + \int_1^2 (-1)\sin(n\omega_0 t)\ dt + \int_2^4 \sin(n\omega_0 t)\ dt$$

b) 3 ptos

$$E_n = \frac{A_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{n} A_k^2 \qquad n = 3$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{j\omega_0 n t}$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t) \cdot e^{-j\omega_0 n t}\ dt$$

$$A_n = 2\,|C_n| \qquad \phi_n = \text{atan}\left(\frac{\text{Im}(C_n)}{\text{Re}(C_n)}\right)$$

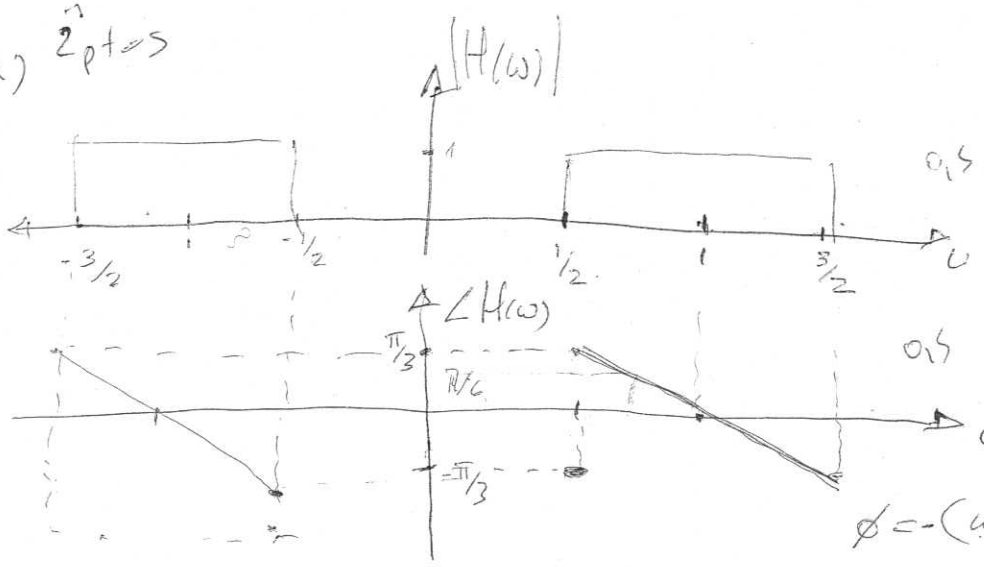
$$E_{<T>} = \frac{1}{T}\int_{<T>} |x(t)|^2\ dt = \frac{1}{5}(4 + 1 + 2) = \frac{7}{5}$$

$$\% = \frac{E_3}{E_{<T>}}$$

NOMBRE:

2. Solución Pregunta 2

a) 2 ptos



$e^{-j(\omega-1)\cdot 2\pi/3}$

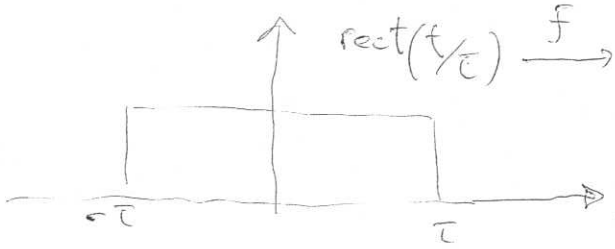
$\phi = -(\omega-1)\,2\pi/3$

$\delta(t)$

$\omega + 1$

$-\frac{1}{2}$

$\mathcal{F}^{-1}\{ H(\omega)\cdot 1 \} \longrightarrow$

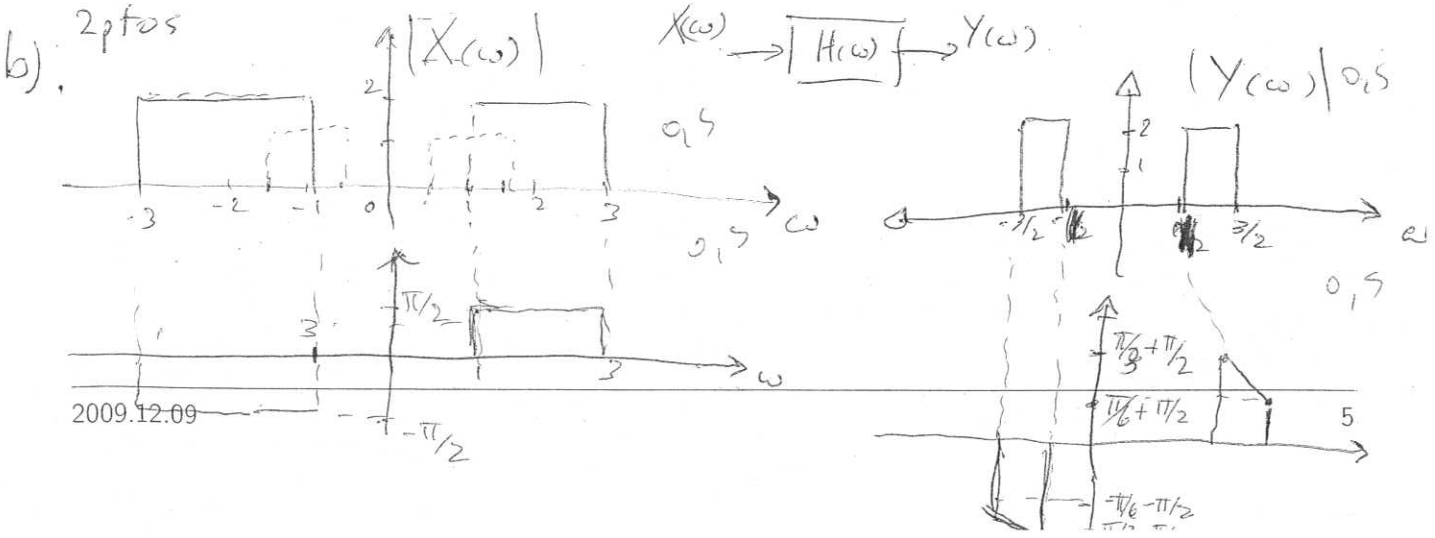


$\text{rect}(t/\tau) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2}{\tau}\,\text{sinc}\left(\omega\cdot\frac{\tau}{2}\right)$

$X(t) \rightarrow -X(\omega)$

$\text{rect}(\omega+\omega_c) + \text{rect}(\omega-\omega_c) \rightarrow 2\,\text{sinc}(t)\cdot e^{-j\omega_c t} + 2\,\text{sinc}(t)\cdot e^{+j\omega_c t}$

b) 2ptos



2.c) 2 ptos.

pos. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega$

$E_x = 4 \cdot 2 \cdot 2 = \frac{16}{2\pi} = \frac{8}{\pi}$ $\frac{4}{\pi}$

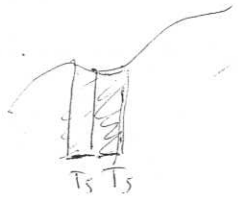
$E_y = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{4}{2\pi} = \frac{2}{\pi}$ $\frac{1}{\pi}$

NOMBRE:

3. Solución Pregunta 3

(1 pto.)

$$TL \quad F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-st}\, dt$$



Si $t = kT_s$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \in \mathbb{Z}$

$$F(s) \simeq \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_s) \cdot e^{-skT_s} T_s =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\, z^{-k} \leftarrow TZ$$

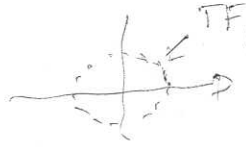
con $z = e^{+sT_s} \cdot e^{\alpha}$

con $e^{\alpha} = T_s$

$z = e^{\alpha + sT_s}$

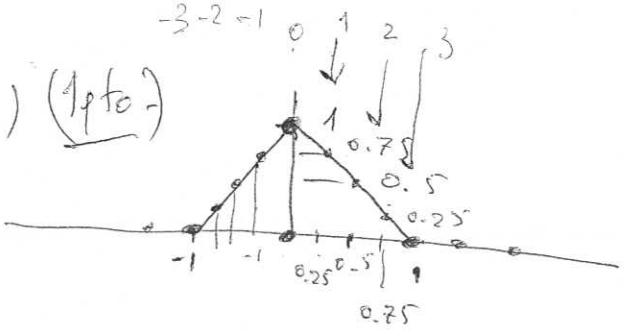
$s = j\omega$

$\Rightarrow z = e^{\alpha + j\omega T_s} \in \mathbb{C}$



* La TZ es una discretización de la TL.

b) i) (1pto)



$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot z^{-k} = \frac{1}{4} z^{+3} + \frac{1}{2} z^{+2} + \frac{3}{4} z^{+1} + 1$$

$$+ \frac{1}{4} z^{-3} + \frac{1}{2} z^{-2} + \frac{3}{4} z^{-1}$$

$$= \frac{1}{4}\left(z^3 + \frac{1}{z^3} \right) + \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + \frac{3}{4}\left(z + \frac{1}{z} \right) + 1$$

ii) (1pto)

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \qquad \sum_{k=0}^{n} a r^k = a \cdot \frac{(1 - r^{n+1})}{1 - r}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1 - \left(z^{-1}\right)^{n+1}}{1 - z^{-1}} \longrightarrow z^{-1} < 1 \leftrightarrow z > 1$$

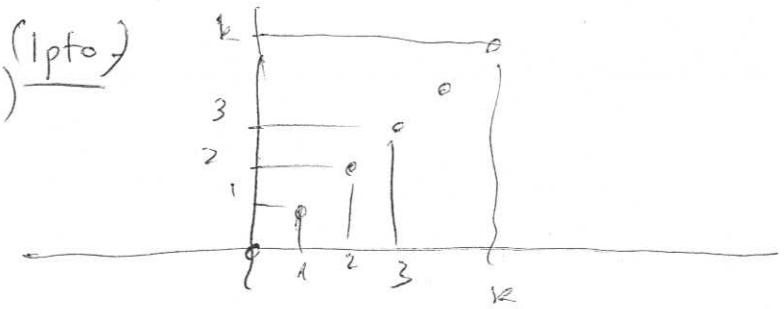
$$= \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

b. iii) (1pto)

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{aT_s k} z^{-k} = \sum \left(\underbrace{e^{+aT_s} z^{-1}}_{r} \right)^k$$

$$= \frac{1}{1 - e^{+aT_s} \cdot z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{aT_s}}$$

b. iv) (1pto)



$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, z^{-k} = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \ldots + k z^{-k} = Y_k$$

$$Y_{k+1} = Y_k + (k+1) z^{-(k+1)} \qquad (1)$$

$$Y_k \cdot z^{-1} = z^{-2} + 2z^{-3} + 3z^{-4} + \ldots + k z^{-(k+1)}$$

$$z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \ldots + z^{-(k+1)}$$

$$Y_{k+1} = Y_k \cdot z^{-1} + \sum_{j=0}^{k+1} z^{-j} - 1 \qquad (2)$$

(1) = (2)

$$Y_k + (k+1) z^{-(k+1)} = Y_k z^{-1} + \sum_{j=0}^{k+1} z^{-j} - 1$$

$$Y_k (1 - z^{-1}) = \sum_{j=0}^{k+1} (z^{-1})^j - 1 + (k+1) z^{-(k+1)}$$

$$Y_k = \frac{1}{(1-z^{-1})} \left[\sum_{j=0}^{k+1} (z^{-1})^j - 1 + (k+1) z^{-(k+1)} \right] \qquad |z| > 1$$

$\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$; $(k+1) z^{-(k+1)} \longrightarrow 0$; $\frac{k+1}{z^{k+1}}$

$$X(z) = \lim_{k \to \infty} Y_k = \frac{1}{1-z^{-1}} \left[\frac{1}{1-z^{-1}} - 1 \right]$$

$$= \frac{z}{z-1} \left[\frac{z}{z-1} - 1 \right] = \frac{z}{z-1} \left[\frac{z - z + 1}{z-1} \right] = \frac{z}{(z-1)^2}$$

c) $Y(z) \overset{(1 \text{ p to})}{=} \frac{1}{z-1} = z^{-1} \cdot \frac{z}{z-1}$

$\downarrow z^{-1}$

$z^{-1} \cdot u_k$

$= u_{k-1}$ //

NOMBRE:

4. Solución Pregunta 4

(2ptos)

a) Aplicando TZ a la ec. de dif. con condiciones iniciales cero

$$zX(z) = AX(z) + BU(z)$$

$$(zI - A)X(z) = BU(z)$$

$$X(z) = (zI - A)^{-1}BU(z) \quad (1)$$

$$Y(z) = CX(z) + DU(z) \quad (2)$$

(1) en (2)

$$Y(z) = \{C[(zI-A)^{-1}B] + D\}U(z)$$

luego Func. de Transf Discreta

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C[zI-A]^{-1}B + D$$

b) (2ptos)

$$X_1 = A X_0 + B u_0$$

$$X_2 = A X_1 + B u_1$$

$$= A(AX_0 + Bu_0) + Bu_1$$

$$= \underline{A^2 X_0} + ABu_0 + Bu_1$$

$$X_3 = AX_2 + Bu_2$$

$$= \underline{A^3 X_0} + A^2 Bu_0 + ABu_1 + Bu_2$$

$$X_4 = \underline{A^4 X_0} + A^3 Bu_0 + A^2 Bu_1 + ABu_2 + Bu_3$$

$$\vdots$$

$$\boxed{X_k = A^k X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} B u_j} \quad //$$

c) (2ptos)

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

($-a_0$ → $-1/4$; $-a_1$ → 0)

i) (0.5p)

$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}_k + 0\, u_k$$

(b_0 → 0; b_1 → 1)

Notando que está en forma canónica controlable

($b_1 = 1$, $b_0 = 0$; $a_1 = 0$, $a_0 = 1/4$)

$$F(z) = \frac{z + 0}{z^2 + 0 + 1/4} \quad \checkmark$$

Otra manera

$$X_1(k+1) = X_2(k) \longrightarrow X_1(k) = X_2(k-1)$$

$$X_2(k+1) = -\frac{1}{4} X_1(k) + u(k)$$

$$y(k+1) = X_2(k+1)$$

(A)

$$X_2(k+1) = -\frac{1}{4} X_2(k-1) + u(k)$$

$$Y(k+1) = -\frac{1}{4} Y(k-1) + u(k) \quad / \cdot Z$$

$$z\,Y(z) = -\frac{1}{4} z^{-1} Y(z) + U(z)$$

$$\left(z + \frac{1}{4} z^{-1}\right) Y(z) = U(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z + \frac{1}{4} z^{-1}} = \frac{z}{z^2 + 1/4}$$

Otra manera

$$F(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/4 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z & -1 \\ 1/4 & z \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} z & 1 \\ -1/4 & z \end{bmatrix}}{z^2 + 1/4}$$

$$F(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} z & 1 \\ -1/4 & z \end{bmatrix}}{z^2 + 1/4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{z}{z^2 + 1/4}$$

ii) (0.5 p) Ver desarrollo anterior

Dado $F(z) = \dfrac{z}{z^2+1/4} = \dfrac{Y(z)}{U(z)}$

$$\left(z^2 + 1/4\right) Y(z) = z\,U(z) \quad \downarrow \cdot z^{-1}$$

$$Y(k+2) + \frac{1}{4} y(k) = u(k+1)$$

$$\boxed{Y(k+1) = -\frac{1}{4} y(k-1) + u(k)} \quad /4$$

iii) (0.5 p)

$$\Phi(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/4 & 0 \end{bmatrix}}_{A}^{k}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} I$$

$$A^3 = A\,A^2 = -\frac{1}{4} I \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & -1/4 \\ 1/16 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = A^3 \cdot A^2 = \left(\frac{-1}{4}\right)^2 \cdot A$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = A^2 \cdot A^2 = +\frac{1}{16} I \qquad A^6 = A^2 \cdot A^4 = \frac{-1}{4^3} I$$

$$A^k = \begin{cases} \left(-\frac{1}{4}\right)^{\frac{k}{2}} I & , \ k \text{ par} \\ \left(\frac{-1}{4}\right)^{\frac{k-1}{2}} A & , \ k \text{ impar} \end{cases}$$

iv) (0.5p)

$$X_k = A^{k-1} B \quad \hookrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ \left(-\frac{1}{4}\right)^{k/2} \end{bmatrix} & , \ k \text{ par} \\ \begin{bmatrix} \left(-1/4\right)^{(k-1)/2} \\ 0 \end{bmatrix} & , \ k \text{ impar} \end{cases}$$