Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

# Control 6

7 de Octubre 2022

---

Responda 2 de las siguientes 3 preguntas

1. Demuestre que una señal no puede ser de ancho de banda limitado y de ancho de tiempo limitado a la vez.

   **Una señal no puede tener ancho de tiempo y ancho de banda limitado a la vez.**

   Consideremos cualquier señal de ancho de tiempo limitado entre $-0.5$ y $0.5$. Esta se puede escribir como:

   $$f(x) = \sqcap(x) f(x)$$

   Solo estamos multiplicando por uno, porque la señal ya es acotada en el intervalo del rect.

   Ahora, para saber como se comporta su espectro, tomamos transformada de Fourier:

   $$\mathcal{F}\{f(x)\} = \mathcal{F}\{\sqcap(x) f(x)\}$$

   Por propiedad de la convolución tendremos que:

   $$\mathcal{F}\{f(x)\} = \mathcal{F}\{\sqcap(x)\} * \mathcal{F}\{f(x)\}$$

   Consideremos ahora que $\mathcal{F}\{\sqcap(x)\} = \text{sinc}(u)$. Notemos que la Transformada de Fourier de $f(x)$ es una convolución con una función infinita, lo que hace al resultado infinito. Por lo tanto, **toda señal acotada en el tiempo es infinita en frecuencia**.Esto también se cumple entre la frecuencia, por propiedad de dualidad de la transformada de Fourier.

2. Determine la frecuencia de muestreo crítica para la señal:

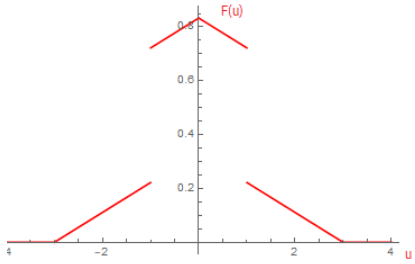
   $$f(t) = \text{sinc}(2x) + \text{sinc}^2(3x)$$

   Para resolver esto, debemos utilizar el teorema de Nyquist: la frecuencia de muestreo crítica es dos veces la frecuencia máxima de la señal. Para seber cual es la frecuencia

máxima de la señal, tomamos transformada de Fourier y aplicamos propiedades de Fourier:

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(u) = \frac{1}{2} \sqcap \left(\frac{u}{2}\right) + \frac{1}{3} \wedge \left(\frac{u}{3}\right)$$

El gráfico de la señal es:




Vemos que se obtiene una señal de ancho de banda limitado, que tiene valor máximo para el rect en $u = 1$ y valor máximo para el triángulo en 3. De esta forma, la frecuencia máxima es $u = 3[Hz]$, por lo que la tasa de muestreo crítica es $f_s = 6[Hz]$.

3. La función $\cos(\omega x + \phi)$ es muestreada a la frecuencia crítica $\frac{\omega}{2\pi} Hz$. Divida la función en su parte par y parte impar y demuestre que las muestras corresponden solo a la parte par. Explique cómo es muestreada la parte impar.

   - Para comenzar, sabemos que toda función puede ser expresada como la suma de su parte par y su parte impar:

     $$f(x) = f_p(x) + f_i(x)$$

     Donde:

     $$f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

   - Podemos dividir la función coseno con fase de la forma:

     $$f_p(x) = \frac{\cos(\omega x + \phi) + \cos(-\omega x + \phi)}{2} \qquad f_i(x) = \frac{\cos(\omega x + \phi) - \cos(-\omega x + \phi)}{2}$$

   - Para resolver, usamos la identidad trigonométrica:

     $$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

   - De esta forma:

     $$\cos(\omega x + \phi) = \cos(\omega x)\cos(\phi) - \sin(\omega x)\sin(\phi)$$
     $$\cos(-\omega x + \phi) = \cos(-\omega x)\cos(\phi) - \sin(-\omega x)\sin(\phi)$$

   - Utilizando en la expresión anterior que coseno es par y seno es impar:

     $$\cos(-\omega x + \phi) = \cos(\omega x)\cos(\phi) + \sin(\omega x)\sin(\phi)$$