Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Eléctrica
IEE2103 – Señales y Sistemas

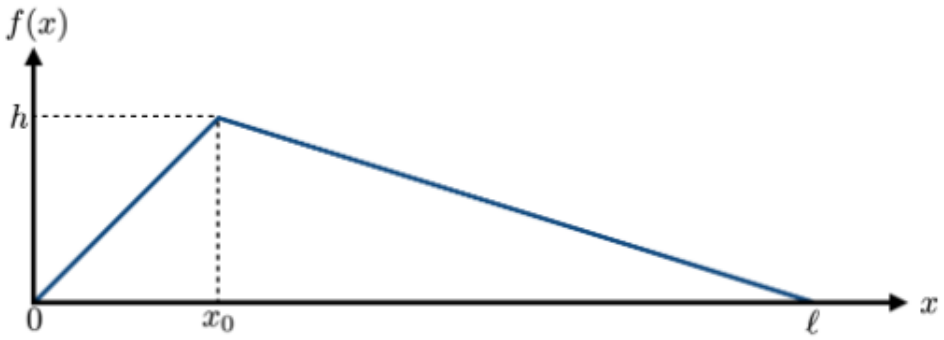
Ayudantía 7

21 de Abril 2023

Nicolás Kantor Nagel - nkantorn@uc.cl

Ejercicios

1. Considere una cuerda de guitarra de largo l que el pulsada hasta una altura h a una distancia x_0 del puente, como se ve en la figura:



a. Determine una expresión en Series de Fourier de la cuerda descrita en la posición de la figura.

Dado que los nodos están fijos en los extremos, podemos inferir que la serie de Fourier no tendrá coseno, solamente senos y deberá ser algo de la forma:

$$b_n = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\sin(n\pi\frac{x}{l})dx$$

Al resolver la función por tramos queda:

$$b_n = \frac{1}{l}\int_0^{x_0} \frac{hx}{x_0}\sin(n\pi\frac{x}{l})dx + \frac{1}{l}\int_{x_0}^{l} \frac{h}{x_0-l}(x-l)\sin(n\pi\frac{x}{l})dx$$

Al desarrollar la integral:

$$b_n = \frac{h}{x_0(l-x_0)} \frac{l^2}{n^2\pi^2} \sin\left(n\pi \frac{x_0}{l}\right)$$

b. Determine si la energía de cada armónico de la cuerda crece o decrece con respecto a la frecuencia y en que proporción.

La energía debende de b_n^2, por lo que dependerá de $1/n^4$, por lo tanto la energía de cada armónico decrece cuando aumenta la frecuencia.

2. Considere la señal definida por la función $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\cos(\theta)} d\theta$$

que satisaface la ecuación diferencial:

$$xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0$$

a. Encuentre la transformada unilateral de Laplace de $f(x)$.

Aplicando transformada a la EDO:

$$-\frac{d}{ds}\{s^2F(s) - f'(0) - sf(0)\} + sF(s) - f(0) - \frac{d}{ds}\{F(s)\} = 0$$

Al desarrollar es fácil llegar a la expresión:

$$\frac{F'(s)}{F(s)} = -\frac{s}{s^2+1}$$

Al resolver:

$$\int \frac{F'(s)}{F(s)} ds = -\int \frac{s}{s^2+1} + \mathbf{C}$$

$$\ln\left(F(s)\right) = -\ln(\sqrt{s^2+1}) + \mathbf{C}$$

$$F(s) = \frac{\mathbf{C}}{\sqrt{s^2+1}}$$

Ahora queremos encontrar el valor de $\mathbf{C}$, y sabemos que:

$$f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

Dado que conocemos $f(t)$ sabemos que $f(0) = 1$, por lo que podemos resolver:

$$1 = f(0) = \lim_{s\to\infty} sF(s) = C$$

Tal que:

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

b. Encuentre una expresión para:

$$\int_0^x f(\zeta)f(x-\zeta)d\zeta \quad \forall x \geq 0$$

Vemos que la expresiónes es equivalente a:

$$\int_0^x f(\zeta)f(x-\zeta)d\zeta = f(x)u(u) * f(x)u(x)$$

Dado que la función en **a.** es derecha:

$$\mathcal{L}\{f(x)u(x)\} = F(s)$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}\{f(x)u(x) * f(x)u(x)\} = F^2(s) = \frac{1}{s^2+1}$$