Examen

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Está permitido usar como máximo tres hojas de apuntes.
- Responda cada pregunta en hojas separadas. Debe colocar su nombre en todas las hojas que ocupe. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. (2 pts.) ¿Existen sistemas no causales en la realidad? Si la respuesta es afirmativa nombre un ejemplo.

   Solución:

   Sí → **1 pts.**, por ejemplo un sistema en el cual la variable independiente no represente el tiempo, como un filtro en una foto → **1 pts.**

2. (4 pts.)

   (a) Se tiene un sistema cuya salida a la entrada $f(t)$ es $g(t) = \text{sgn}\{f(t)\}\sqrt{f^2(t)}$.

      i. (1 pts.) Demuestre si el sistema es lineal o no.

      ii. (1 pts.) Demuestre si el sistema es invariante o no.

   (b) (2 pts.) Encuentre la transformada de Fourier de $f(x) = 2\sqcap(\pi - \pi x) - 1$.

Solución:

(a) Dado que $\text{sgn}\{f(t)\}\sqrt{f^2(t)}$ es idénticamente $f(t) \rightarrow$ **1 pts.**, se tiene que el sistema es $g(t) = f(t)$, que trivialmente es lineal e invariante $\rightarrow$ **1 pts.**

(b) Nótese que $\sqcap(\pi - \pi x) = \sqcap(1 - x)$ y que por lo tanto $f(x) = -\text{sgn}(x - 1) \rightarrow$ **1 pts.**, de este modo

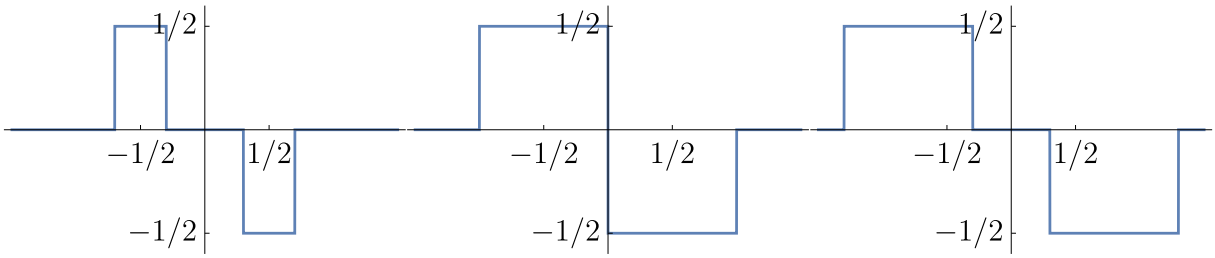
$$\begin{aligned} \text{sgn}(x) &\rightarrow -\frac{i}{\pi u} \\ -\text{sgn}(x) &\rightarrow \frac{i}{\pi u} \\ -\text{sgn}(x-1) &\rightarrow \frac{i}{\pi u}e^{-i2\pi u} \rightarrow \text{1 pts.} \end{aligned}$$

3. (5 pts.) Grafique la señal $f(x) = \mathcal{F}\{\sin(\pi x)\} * \sqcap(x/a)$ para distintos valores de $a > 0$.

Solución: $f(x) = i \updownarrow (x) * \sqcap(x/a)$, luego

$$f(x) = \frac{i}{2}\left(\sqcap\left(\frac{x+1/2}{a}\right) - \sqcap\left(\frac{x-1/2}{a}\right)\right) \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Gráficamente será



$\rightarrow$ **3 pts.**

Figure 1: Gráficos para $a < 1$, $a = 1$ y $a > 1$.

4. (4 pts.) Para el siguiente sistema

$$g(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

(a) (2 pts.) Encuentre $h(x,\xi)$.

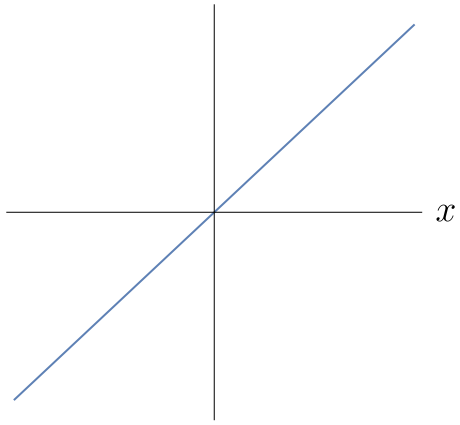
(b) (2 pts.) Si $f(x) = \sqcap(x)$, encuentre la salida de dicho sistema y grafique.

Solución:

(a) Este es un sistema **no causal y variante** $\rightarrow$ **1 pts.** por lo tanto su respuesta al impulso dependerá de la posición ξ, es decir

$$\begin{aligned} h(x,\xi) &= \int_{-x}^{x} \delta(t-\xi)\,\mathrm{d}t \\ &= \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) & \text{, si } |\xi| < x \\ 0 & \text{, si no} \end{cases} \rightarrow \textbf{1 pts.} \end{aligned}$$

(b) Como el sistema integrará hasta x el escalón, se tendrá como resultado de la integral el valor x, $\forall x \in \mathbb{R}$ (incluyendo el cambio de signo cuando $x < 0$). Por lo tanto $g(x) = x \rightarrow$ **1 pts.**



$\rightarrow$ **1 pts.**

5. (3 pts.)

   (a) (1 pto.) Se sabe que la transformada de Fourier de $f(x)$ es $F(u) = \sqrt{u} - \sqrt{-u}$, ¿Cuánto vale $f(0)$?

   (b) (1 pto.) Se tiene $f(x) = J_1(x)/x$, donde J_1 es la función de Bessel de orden uno. ¿La ROC de su LT incluye al eje imaginario? Justifique su respuesta.

   (c) (1 pto.) Demuestre que $\cos(\pi/4)\,\mathrm{sinc}(1/4) = \mathrm{sinc}(1/2)$

Solución:

(a) Como $F(u)$ es impar se tendrá que $f(0) = 0 \rightarrow$ **1 pts.**

(b) Como J_1/x es integrable, la ROC debe incluir al eje imaginario. Si no fuera integrable no existiría la transformada de Fourier de jinc$\rho \rightarrow$ **1 pts.**

(c) Como se tiene que $\cos(\pi x)\,\mathrm{sinc}(x) = \mathrm{sinc}(2x)$ es cierto, lo que se puede ver tomando su transformada de Fourier $\uparrow\uparrow (x) * \sqcap(x) = 1/2 \sqcap (x/2)$, solo bastará evaluar en $x = 1/4 \rightarrow$ **1 pts.**

6. (3 pts.) Sea $y(t) = x_1(t) * x_2(t)$, donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son de ancho de banda limitado con $X_1(u) = 0$, $\forall |u| > 2\,\text{kHz}$ y $X_2(u) = 0$, $\forall |u| > 1\,\text{kHz}$. Especifique el intervalo de tiempos de muestreo T, tales que sea posible recuperar completamente la señal original mediante una interpolación sinc, luego de haber sido muestreada.

   Solución:

   Por propiedad de convolución $Y(u) = 0$, $\forall |u| > 1\,\text{kHz}$, por lo tanto $f_{\max} = 1\,\text{kHz} \rightarrow$ **1 pts.**

   Esto implicará, por el teorema de Nyquist, que $f_s = 2\,\text{kHz} \rightarrow$ **1 pts.** Como el tiempo de muestreo es el inverso de la frecuencia de Nyquist se tendrá $0\,\text{ms} < T < 0.5\,\text{ms}$ cumplirá los requerimientos $\rightarrow$ **1 pts.**

7. (3 pts.) Indique cuál es la salida del siguiente código MATLAB (nótese que la última línea no tiene punto y coma)

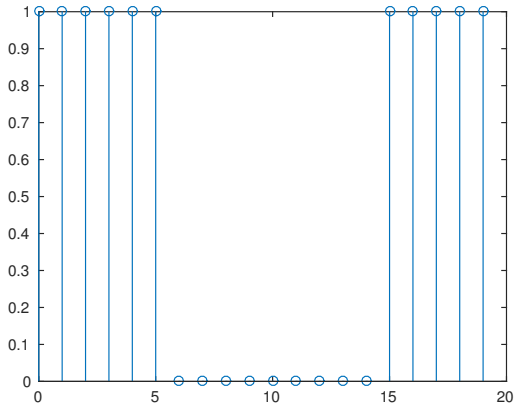
```
f = [2 1 0 3]; g = [2 3 0 1];
F = fft(f); G = fft(g);
h = ifft(real(F)-real(G)+imag(F)+imag(G))
```

Solución:

Notamos que la función $f[n]$ es real y $g[n] = f[-n]$, lo que implicará que $F[k]$ es hermitiana $\rightarrow$ **1 pts.** y por lo tanto su parte real será par y su parte imaginaria será impar $\rightarrow$ **1 pts.**, es decir

$$\begin{aligned} h[n] &= \mathrm{DFT}^{-1}\{\mathrm{Re}\{F[k]\} - \mathrm{Re}\{F[-k]\} + \mathrm{Im}\{F[k]\} + \mathrm{Im}\{F[-k]\}\} \\ &= \mathrm{DFT}^{-1}\{\mathrm{Re}\{F[k]\} - \mathrm{Re}\{F[k]\} + \mathrm{Im}\{F[k]\} - \mathrm{Im}\{F[k]\}\} \\ &= \left[\, \underline{0} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \,\right] \rightarrow \text{**1 pts.**} \end{aligned}$$

8. (4 pts.) Pedrito tiene como señal preferida $\tilde{f}[n]$ de largo $N = 20$, cuyo gráfico es



Sin embargo, el no ha hecho el curso "Señales y Sistemas" así que no esta seguro de cual será el resultado de las siguientes operaciones a su función ¿Lo ayudas?

(a) Grafique fft $\left\{\tilde{f}[n]\right\}$.

(b) Grafique fftshift $\left\{\tilde{f}[n]\right\}$.

(c) Grafique fftshift $\left\{\text{fft}\left\{\tilde{f}[n]\right\}\right\}$.

(d) Grafique fft $\left\{\text{fftshift}\left\{\tilde{f}[n]\right\}\right\}$.

Solución:

Cosas importantes a notar:

- (a) es $\tilde{F}[k]$ → **1 pts.**
- (b) es $\tilde{f}[n - N/2]$ → **1 pts.**
- (c) es $\tilde{F}[k - N/2]$ → **1 pts.**
- (d) es $\tilde{F}[k] \cdot (-1)^k$ → **1 pts.**

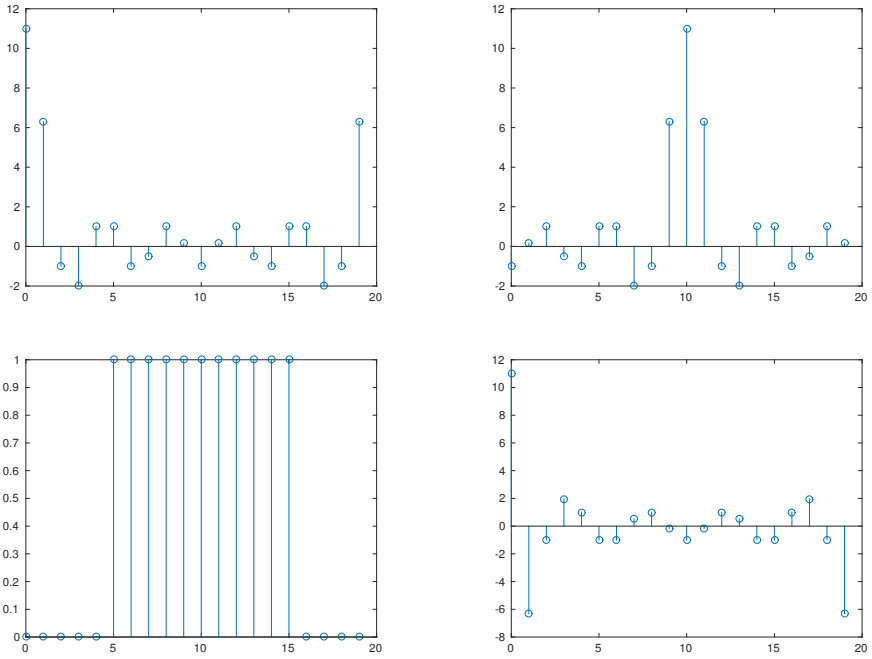


Table 1: Soluciones.

9. (5 pts.) Encuentre la frecuencia producida por un parlante que emite un tono puro, si se conoce la DFT de $N = 16$. La señal fue muestreada a 5 kHz y su DFT se encuentra en la figura.

Solución:

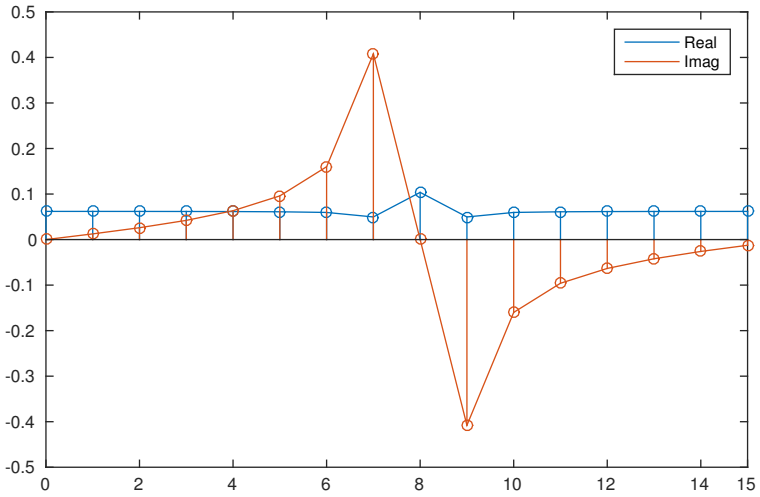
Se sabe que la frecuencia de muestreo es 5 kHz por lo que $T = 0.2$ ms $\rightarrow$ **1 pts.** También se sabe que $N = 16$, por lo que usando$NUT = 1$ tenemos

$$U = \frac{1}{NT} = \frac{1}{16 \cdot 0.2} = \frac{1}{3.2} \approx 0.31 \text{ kHz} \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

Del gráfico vemos que hay un peak real en $k = 8$ e imaginarios en 7 y 9. Que no sean exactamente deltas nos indica **derrame** y también al estar tan cerca de $N/2$ sabemos que estamos muy cerca del máximo permitido por Nyquist $\rightarrow$ **1 pts.** El peak a considerar está entre 7 y 8. Digamos 7.5, es decir la frecuencia es

$$f = 7.5 \cdot 0.31 \approx 2.35 \text{ kHz} \rightarrow \textbf{1 pts.}$$

La frecuencia de Nyquist es ≈ 2.5 kHz $\rightarrow$ **1 pts.**



10. (5 pts.) Encuentre tres funciones diferentes que tengan transformada de Laplace

$$F(s) = \frac{2}{(s-1)(s+1)}$$

Para cada función determine la región de convergencia. ¿Cuál de ellas tiene transformada de Fourier?

Solución:

Usando fracciones parciales:

$$F(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Ahora tendremos 3 casos posibles en los cuales la ROC tendrá intersección no nula:

$$f_1(t) = e^{t}\sqcap(t) - e^{-t}\sqcap(t), \qquad \mathrm{Re}\{s\} > 1 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

$$f_2(t) = -e^{t}\sqcap(-t) - e^{-t}\sqcap(t), \qquad |\mathrm{Re}\{s\}| < 1 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

$$f_3(t) = -e^{t}\sqcap(-t) + e^{-t}\sqcap(-t), \qquad \mathrm{Re}\{s\} < -1 \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

La que tendrá transformada de Fourier será la que su ROC incluya al eje imaginario, que en este caso será $f_2 \rightarrow$ **1 pts.**

11. (4 pts.) Para una función $f(t)$ desconocida se tiene que

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) * e^{-at} \mathrm{d}t = \frac{1}{a^2}$$

¿Qué condición debe cumplir $\lim_{t\to\infty} f(t)$ para que esto sea cierto?

Solución:

Partimos de:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) * e^{-at} \sqcap(t)\, \mathrm{d}t &= \mathcal{L}\left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t) * e^{-at} \sqcap(t) \right\}\Big|_{s=0} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}} \\ &= \lim_{s\to 0} sF(s) \frac{1}{s+a} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}\end{aligned}$$

Luego tendremos que a partir de la información del enunciado que este límite debe ser:

$$\frac{1}{a} \lim_{s\to 0} sF(s) = \frac{1}{a^2} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Entonces, por el teorema de valor final:

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} f(t) = \frac{1}{a}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

12. (4 pts.) Si la función $f[n]$ tiene transformada Z

$$\begin{aligned} F(z) &= (\sqcap * g)[N-1] \\ g[n] &= a[n+1]\, z^{-n-1} - a[n]\, z^{-n} \end{aligned}$$

Donde la sucesión $a[n]$ representa la suma de los primeros n números naturales. Encuentre $f[n]$.

Solución:

Resolviendo la serie telescópica que se obtiene de evaluar la convolución

$$\sum_{n=0}^{N-1} a[n+1]\, z^{-n-1} - a[n]\, z^{-n} = a[N]\, z^{-N} \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

Cuya transformada inversa es

$$f[n] = \frac{N(N+1)}{2}\delta[n-N] \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}}$$

13. (4 pts.) La función de transferencia de un sistema discreto $H(z)$ con ROC todo el plano (excepto $z = 0$), es evaluada en la circunferencia unitaria:

$$H\left(e^{i\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \sin\theta\right)$$

Encuentre la respuesta al impulso $h[n]$. ¿Es la DFT $\{h[n]\}$ real?

Solución:

Es conveniente expresar el seno como suma de exponenciales

$$\begin{aligned} H\left(e^{i\theta}\right) &= \frac{1}{2}\left(1 + \sin\theta\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(2 - ie^{i\theta} + ie^{-i\theta}\right) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}} \end{aligned}$$

Es decir,

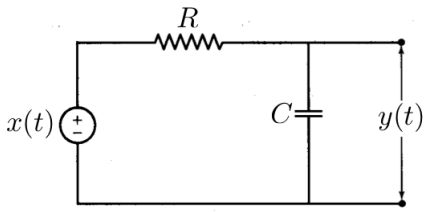
$$H(z) = \frac{1}{4}\left(2 - iz^{1} + iz^{-1}\right) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

cuya transformada inversa Z es

$$h[n] = \frac{1}{4}\left(\begin{array}{ccc} -i & \underline{2} & i \end{array} \right) \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

Cuya DFT es real debido a que $h[n]$ es hermitiana $\rightarrow$ $\boxed{\textbf{1 pts.}}$

14. (5 pts.) Considere el circuito eléctrico RC de la siguiente figura, donde la entrada es el voltaje $x(t)$ y la salida el voltaje en el condensador $y(t)$:



(a) (1 pts.) Escriba la ecuación diferencial que describe el sistema

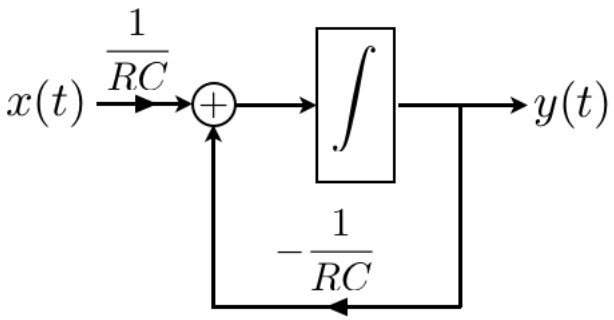
(b) (1 pts.) Dibuje su diagrama de bloques

(c) (3 pts.) Calcule la respuesta del sistema cuando la entrada es $e^{-at}\sqcap(t)$.

Solución:

(a) La ecuación diferencial es $y'(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t) \rightarrow$ **1 pts.**

(b) El diagrama de bloques utilizando un integrador es



$\rightarrow$ **1 pts.**

(c) La solución a esta ecuación es de la forma

$$y(t) = \frac{1}{RC}e^{\frac{-t}{RC}}\int_{\tau=0}^{t} x(\tau)e^{\frac{\tau}{RC}}d\tau\sqcap(t) \rightarrow$$ **1 pts.**

Esta solución se obtiene fácilmente mediante cualquier método (factor integrante, respuesta homogénea y particular o Laplace). Mediante cualquiera de estos métodos debiera llegarse a la solución total

$$y(t) = y_0e^{-\frac{1}{RC}t} - \frac{1}{1-aRC}e^{-\frac{t}{RC}}\sqcap(t) + \frac{1}{1-aRC}e^{-at}\sqcap(t) \rightarrow$$ **2 pts.**

15. (3 pts.) Se tiene un sistema que calcula la media móvil de las últimas M muestras de la entrada. Encuentre la función de transferencia en el dominio Z y opérela de tal forma que su denominador corresponda a $\left(\mathcal{Z}\left\{\sqcap[n]\right\}\right)^{-1}$.

Solución:

(a) Si $f[n]$ es la entrada, el promedio móvil se calcula como

$$g[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} f[n-k] \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

que corresponde a convolucionar con M unos $\rightarrow$ **1 pts.** La función de transferencia será entonces

$$H(z) = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{1}{M}\frac{1-z^{-M}}{1-z^{-1}} \rightarrow \boxed{\textbf{1 pts.}}$$

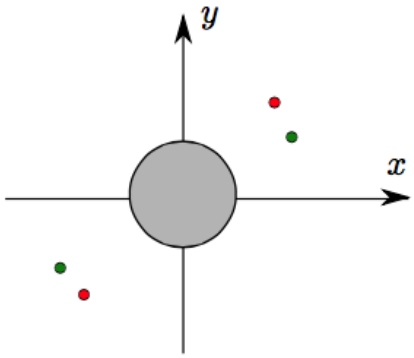
16. (4 pts.) El siguiente par de imágenes muestra la función $\overrightarrow{\text{cat}}(x,y)$ y ésta misma con ruido RGB (ver imagen en proyector), explique gráficamente que filtro utilizaría para restaurar la imagen original.

    Nota: puede suponer que $\text{cat}_i(x,y) \rightarrow \text{circ}(x,y)$, $i = \{R,G,B\}$ (para cada componente de color), para facilitar los dibujos de las transformadas de Fourier.



Solución:

Se tendrá que usar un filtro Notch que elimine la sinusoide sumada en R y la sinusoide sumada en G, → **2 pts.** es decir los filtros deben ser los que muestra la figura donde los



puntos rojos son un rechaza-banda en R y los puntos verdes son un rechaza-banda en G → **2 pts.**

17. (4 pts.) Encuentre y grafique el resultado de la siguiente convolución bi-dimensional:

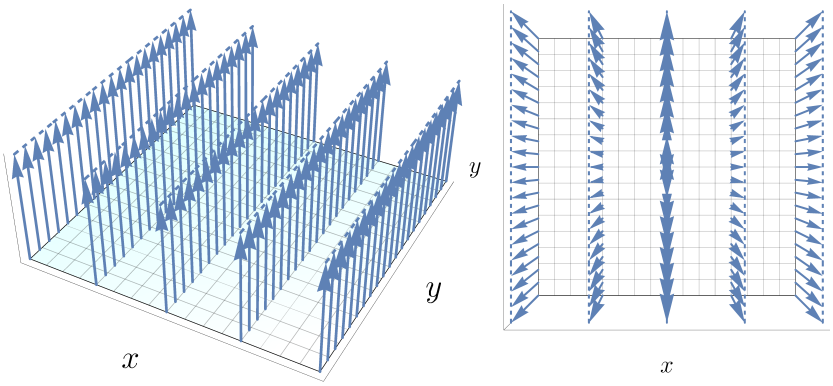
$$f(x,y) = \sqcup\!\sqcup(x,y) * \delta(x) \wedge (y)$$

Solución:

Por separabilidad

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (\sqcup\!\sqcup(x) * \delta(x))\,(\sqcup\!\sqcup(y) * \wedge(y)) \\ &= \sqcup\!\sqcup(x)\,1\,(y) \rightarrow \boxed{\textbf{2 pts.}} \end{aligned}$$

Gráficamente es



$\rightarrow$ **2 pts.**