Examen SOLUCIÓN

- No se permiten consultas de NINGÚN tipo. Si considera que falta información, haga una suposición razonable, que no se contraponga al enunciado, y déjela claramente expresada.
- Escriba un problema en cada hoja. Debe colocar su nombre en todas las hojas. ¡hágalo ahora! Las hojas sin nombre no serán corregidas.

---

1. [9 ptos] Se tiene la siguiente ecuación diferencial que desccribe un sistema causal, lineal e invariante, de salida $g(t)$ y entrada $f(t)$

$$g(t) - \frac{2}{3}g'(t) + \frac{1}{9}g''(t) = af(t)$$

donde a es una constante real.

   (a) [3 ptos] Encuentre la función de transferencia en el dominio de Laplace del sistema.
   Resultado: Tomando Laplace a la ecuación diferencial se tiene

$$(1 - \frac{2}{3}s + \frac{1}{9}s^2)G(s) = aF(s)$$

   De donde la función de transferencia es

$$H(s) = \frac{G(s)}{F(s)} = \frac{a}{1 - \frac{2}{3}s + \frac{1}{9}s^2} = \frac{a}{(1 - \frac{1}{3}s)^2} = \frac{9a}{(s-3)^2}$$

   (b) [3 ptos] Diga si el sistema es estable y justifique su respuesta.
   Resultado: El sistema es inestable porque tiene dos polos en $s = 3$ que están en el plano semiderecho y como el sistema es causal, la región de convergencia es a la derecha de los polos. El origen no está incluido.

   (c) [3 ptos] Si las condiciones inciales son $g(0) = 1$ y $g'(0) = 4$, y $f(t) = \sqcap(t)$, encuentre $g(t)$.
   Resultado: Para resolver la ecuación diferencial con condiciones iniciales se usa la transformada de Laplace unilateral.

$$(1 - \frac{2}{3}s + \frac{1}{9}s^2)G(s) + \frac{2}{3}g(0) - \frac{1}{9}sg(0) - \frac{1}{9}g'(0) = a\frac{1}{s}$$

$$s(9 - 6s + s^2)G(s) - s^2 + 2s = 9a$$

$$\begin{aligned} G(s) = \frac{s^2 - 2s + 9a}{s(s-3)^2} &= \frac{s}{(s-3)^2} - \frac{2}{(s-3)^2} + \frac{9a}{s(s-3)^2} \\ &= \frac{s-3}{(s-3)^2} + \frac{3}{(s-3)^2} - \frac{2}{(s-3)^2} + \frac{9a}{s(s-3)^2} \\ &= \frac{1}{s-3} + \frac{1}{(s-3)^2} + a\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s-3} + \frac{3}{(s-3)^2}\right\} \end{aligned}$$

   Cuya inversa es

$$g(t) = \left\{(1+t)e^{3t} + a(1 - e^{3t} + 3te^{3t})\right\} \sqcap(t)$$

2. [9 ptos] Se tiene la siguiente ecuación de diferencias que desccribe un sistema causal, lineal e invariante, de salida $g[n]$ y entrada $f[n]$

$$g[n] - \frac{2}{3}g[n-1] + \frac{1}{9}g[n-2] = 3f[n] - af[n-2]$$

donde a es una constante real.

(a) [3 ptos] Si las condiciones inciales son $g[-1] = g[-2] = 0$ y $f[n] = \sqcap[n]$, encuentre $g[n]$ para $n = 0, 1, 2$ y 3.

Resultado:

Podemos simular diretamente la ecuación, como en la siguiente tabla

n	$f[n]$	$g[n] = \frac{2}{3}g[n-1] - \frac{1}{9}g[n-2] + 3f[n] - af[n-2]$
-2	0	0
-1	0	0
0	1	$\frac{2}{3}\cdot 0 - \frac{1}{9}\cdot 0 + 3 - a\cdot 0 = 3$
1	1	$\frac{2}{3}\cdot 3 - \frac{1}{9}\cdot 0 + 3 - a\cdot 0 = 5$
2	1	$\frac{2}{3}\cdot 5 - \frac{1}{9}\cdot 3 + 3 - a\cdot 1 = 6 - a$
3	1	$\frac{2}{3}\cdot (6-a) - \frac{1}{9}\cdot 5 + 3 - a\cdot 1 = (58 - 15a)/9$

(b) [3 ptos] Encuentre la respuesta al impulso del sistema.

Resultado: La transformada Z de esta ecuación es

$$G(z) - \frac{2}{3}z^{-1}G(z) + \frac{1}{9}z^{-2}G(z) = 3F(z) - az^{-2}F(z)$$

La función de transfarencia será

$$H(z) = \frac{G(z)}{F(z)} = \frac{3 - az^{-2}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{9}z^{-2}} = \frac{3 - az^{-2}}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})^2}$$

Sabemos que

$$p[n] = n\left(\frac{1}{3}\right)^n \sqcap[n] \longrightarrow \frac{\frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})^2}$$

Escribimos la función de transferencia como

$$H(z) = 9z\frac{\frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})^2} - 3az^{-1}\frac{\frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})^2}$$

Cuya inversa será

$$\begin{aligned} h[n] &= 9p[n+1] - 3ap[n-1] \\ &= 9(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \sqcap[n+1] - 3a(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \sqcap[n-1] \end{aligned}$$

(c) [3 ptos] Diga si el sistema es estable y justifique su respuesta.

Resultado: El sistema es estable porque tiene dos polos en $z = 1/3$ y como es causal, la región de convergencia es hacia el exterior. Es decir incluye al círculo unitario.

3. [8 ptos] Se tiene la siguiente función

$$p(x) = 1 + \sin \pi x \quad \text{para } 0 < x < 3 \text{ y } 0 \text{ para todo otro valor.}$$

   (a) [4 ptos] Calcule $P(0)$, su transformada de Fourier evaluada en cero.

   (b) [4 ptos] Calcule $P'(0)$, la derivada de su transformada de Fourier evaluada en cero.

   Resultado: Conviene usar las siguientes identidades

$$P(0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, dx$$

   y

$$P'(0) = -i2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x p(x)\, dx$$

   Es decir,

$$\begin{aligned} P(0) &= \int_0^3 dx + \int_0^3 \sin \pi x\, dx \\ &= 3 + \int_0^1 \sin \pi x\, dx \\ &= 3 + \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

   y

$$\begin{aligned} \frac{1}{-i2\pi} P'(0) &= \int_0^3 x\, dx + \int_0^3 x \sin \pi x\, dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{\sin \pi x}{\pi^2} - \frac{x \cos \pi x}{\pi} \Big|_0^3 \\ &= \frac{9}{2} + \frac{3}{\pi} \end{aligned}$$

   con lo que

$$P'(0) = -i2\pi(\frac{9}{2} + \frac{3}{\pi}) = -i(9\pi + 6)$$

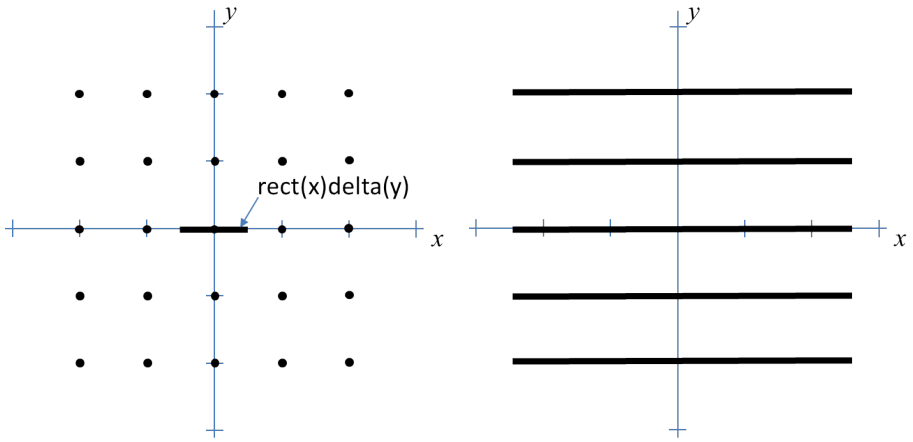
4. [6 ptos] Encuentre y grafique el resultado de la siguiente convolución bi-dimensional

$$f(x, y) = \text{Ш}(x, y) * \sqcap(x)\delta(y)$$

   Resultado:

$$f(x, y) = \text{Ш}(x, y) * \sqcap(x)\delta(y) = \text{Ш}(y)$$

   Gráficamente es

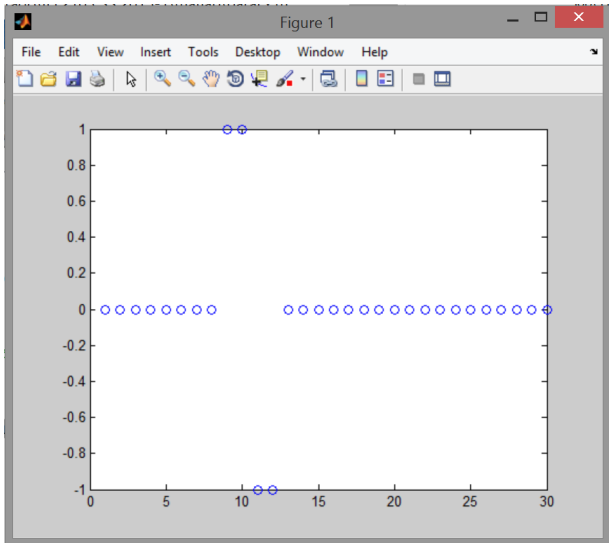


5. [6 ptos] Dibuje el gráfico que produce el siguiente código de Matlab

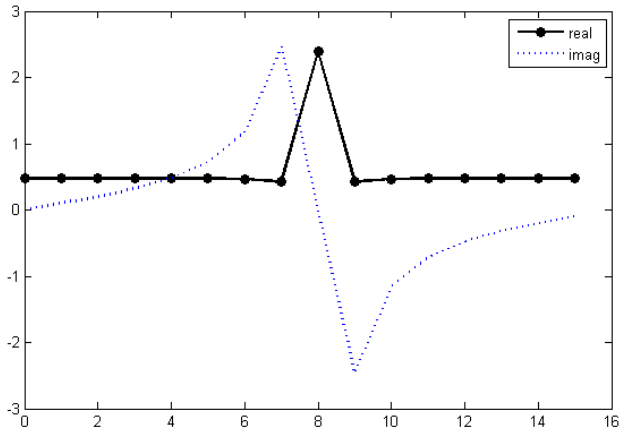
```
x = [ones(1,10) -ones(1,10) ones(1,10)];
wb = ones(1,4);
w = zeros(1,30);
w(8+(1:4)) = wb;
y = x.*w;
plot(1:30,y,'o')
```

Resultado:

La primera línea crea el vector x con 10 unos seguido de 10 menos unos y de 10 unos. La segunda línea crea un vector de 4 unos. La tercera y cuarta línea crean un vector de 30 ceros en los que las posiciones 9 a 12 son reemplazadas por unos. La quinta línea multiplica w por x. Esto es, aplica una ventana de apodización rectangular que selecciona del vector solo los elementos que están en las posiciones 9 a 12 (dos unos y dos menos unos). La última línea grafica el resultado, tal como se ve en al figura que sigue



6. [6 ptos] Calcule la frecuencia a la que oscila un parlante que emite un tono puro, si se conoce la DFT, en la figura, de 16 muestras del audio producido por él. La señal fue muestreada a 5 kHz.



Resultado: Se sabe que la frecuencia de muestreo es 5 kHz, por lo que $T = 0.2$ ms. También se sabe que $N = 16$, por lo que usando $NUT = 1$ tenemos

$$U = \frac{1}{NT} = \frac{1}{16 \cdot 0.2} = \frac{1}{3.2} \approx 0.31 \text{ kHz}.$$

Del gráfico vemos que hay un peak real en k = 8 e imaginarios en 7 y 9. Que no sean exactamente deltas nos indica derrame y también al estar tan cerca de $N/2$ sabemos que estamos muy cerca del máximo permitido por Nyquist. El peak a considerar está entre 7 y 8. Digamos 7.5, es decir la frecuencia es $7.5 \cdot 0.31 \approx 2.35$ kHz. La frecuencia de Nyquist es 2.5 kHz.